

# Un PAR DE PROBLEMAS DE C.V.U.

## CÁLCULO DE REGLA DE LA CADENA

1

[P1] Sea  $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^2$ , esto es  $\phi$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$  y sus derivadas parciales son funciones continuas. Sean  $\phi_1, \phi_2$  las funciones coordenadas de  $\phi$  que satisfacen:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}. \quad (*)$$

Sea  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  función de clase  $C^1(\mathbb{R}^2)$  y definimos  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f = h \circ \phi$ , demostrar que:

$$\langle \nabla f(x, y), \nabla \phi_1(x, y) \rangle = \frac{\partial h}{\partial x}(\phi(x, y)) \cdot \|\nabla \phi_1(x, y)\|^2.$$

Soluc Observamos lo que si  $h$  y  $\phi$  son diferenciables y con respectivas derivadas parciales continuas (ie clase  $C^1$ )  $\Rightarrow f$  lo es por composición de fns de esa regularidad.

Un pequeño análisis de las dimensiones:

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \end{pmatrix} \Rightarrow D\phi \in M_{2 \times 2}, \quad h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow Dh \in M_{1 \times 2}$$

Así que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tiene  $Df \in M_{1 \times 2}$  y se puede aplicar la regla de la cadena para establecer que:

$$\underbrace{Df(x, y)}_{1 \times 2} = D(h \circ \phi)(x, y) = \underbrace{Dh(\phi(x, y))}_{1 \times 2} \cdot \underbrace{D\phi(x, y)}_{2 \times 2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1 \times 2}$

$$= \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right) \Big|_{\phi(x,y)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{bmatrix} \Big|_{(x,y)}$$

evaluación  $\rightarrow \phi(x,y)$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(\phi(x,y)) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial h}{\partial y}(\phi(x,y)) \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(\phi(x,y)) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial h}{\partial y}(\phi(x,y)) \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \in M_{1 \times 2}$$

transponiendo para obtener el gradiente:

$$\Rightarrow \nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} \text{Por otro lado si } \phi \text{ es clase } C^1 \\ \Rightarrow \text{ sus componentes } \phi_1, \phi_2 \text{ son} \\ \Rightarrow \nabla \phi_1 \text{ existe y } \nabla \phi_1 = \begin{bmatrix} \partial \phi_1 / \partial x \\ \partial \phi_1 / \partial y \end{bmatrix} \\ \phi_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

ojo aca no  
escribimos las  
evaluaciones por  
separado para en  
mente

y entonces calculamos  $\langle \nabla F, \nabla \phi_1 \rangle \Rightarrow$

$$= \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi_2}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)$$

$\underbrace{\left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)}_{=0}$

usando las  
hipótesis  
(\*)

Recordamos  
us  
evaluc.  $\rightarrow$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}(\phi(x,y)) \cdot \|\nabla \phi_1(x,y)\|^2$$

El siguiente problema tiene cierta dificultad, pues involucra varios cálculos donde hay que aplicar propiedades de cálculo de diferenciales teniendo cuidado con las dimensiones de los objetos. Es muy recomendable estar atento a la notación y cuidado:

[P2] Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ .

Considere además la función:

$$h(x) = \begin{cases} f(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } x = \vec{0} \end{cases}$$

(a) Demostrar que si  $|f(a)| \leq a^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ , entonces  $h$  es diferenciable en todo  $\mathbb{R}^m$ .

(b) Demostrar que  $\forall x \in \mathbb{R}^m$  se tiene

$$\|x\| f'(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \nabla h(x) \cdot x$$

(c) Demostrar que  $\forall x \in \mathbb{R}^m$  con  $x \neq \vec{0}$

$$\left| f'(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \|\nabla h(x)\|$$

y si  $y$  es ortogonal a  $x$  entonces

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.i.} \\ \text{en } \mathbb{R}^m}}{y} \cdot \nabla h(x) = \frac{f'(\|x\|)}{\|x\|} \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.i.}}}{y}$$

Solución:

a) Claramente  $h$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^m \setminus \{\vec{0}\}$  por Álgebra de Funciones Relativa a la Diferenciabilidad.

Ahora como  $|f(a)| \leq a^2 \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(0)| \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$ .

$h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , vemos lo que  $Dh(\vec{0}) = \left( \frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m} \right)(\vec{0}) = \vec{0}_{1 \times m}$

en efecto:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{0}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(\underbrace{0, \dots, t, \dots, 0}_{j\text{-ésimo}}) - h(\vec{0})}{t} \quad j = 1, \dots, m$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(\| (0, \dots, t, \dots, 0) \|) g\left(\frac{(0, \dots, t, \dots, 0)}{\| (0, \dots, t, \dots, 0) \|}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(|t|) g\left(\underbrace{(0, \dots, \frac{t}{|t|}, \dots, 0)}_{g(0, \dots, \pm 1, \dots, 0)}\right) \quad \begin{matrix} t \rightarrow 0 \\ t < 0 \end{matrix}$$

luego  $\left| \frac{1}{t} f(|t|) \right| \left| g(0, \dots, \pm 1, \dots, 0) \right| \nearrow \begin{matrix} + \leftarrow \text{Límite lateral} \\ \text{en muchos usos} \\ g \text{ esta acotada} \end{matrix}$

$$\leq \frac{1}{|t|} \cdot |t|^2 = |t| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \begin{matrix} \nwarrow \text{en muchos usos} \\ \text{(ie los laterales)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \nearrow \text{si no ocurriera} \\ \text{esto el} \\ \text{límite} \neq \end{matrix}$$

$$\therefore \frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{0}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$\Rightarrow$  el candidato a diferencial de  $h$  en  $(\vec{0})$  es

$Dh(\vec{0}) = (0, \dots, 0) \in 1 \times m$  ✓ y usando por definición la diferenciabilidad de  $h$  en  $\vec{0}$ .

luego calculamos:

$$\lim_{u \rightarrow \vec{0}} \frac{|h(u) - h(\vec{0}) - \cancel{Dh(\vec{0}) \cdot u}|}{\|u\|} = 0 \leftarrow \text{queremos!}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{\|u\|} \cdot |h(u)|, \text{ estudiemos entonces}$$

$$\frac{|h(u)|}{\|u\|} = \frac{1}{\|u\|} \left| f(\|u\|) \cdot g\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right|$$

hipótesis  $\rightarrow \leq \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\|^2 \cdot \left| g\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right| = \|u\| \cdot \left| g\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right|$

Notamos que  $\frac{u}{\|u\|} \in \overline{B}(0,1)$  y  $\overline{B}(0,1)$  es compacto en  $\mathbb{R}^m$   
y como  $g$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^m$  en particular continua

$$\Rightarrow g \text{ está acotada en } \overline{B}(0,1) \Rightarrow |g(\vec{w})| \leq R \quad \forall \vec{w} \in \overline{B}(0,1)$$

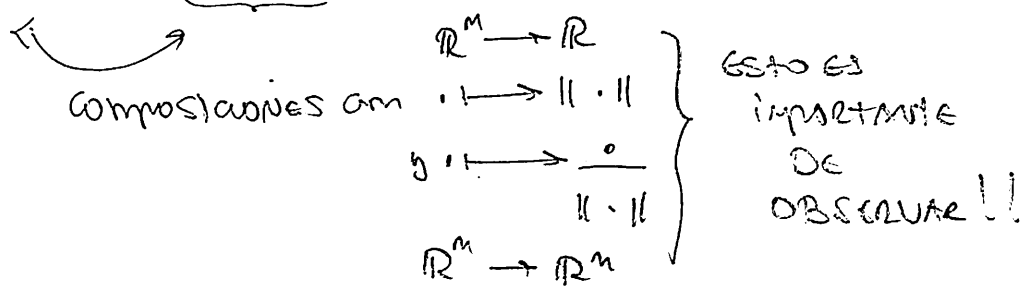
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|h(u)|}{\|u\|} \leq \|u\| \left| g\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right| \leq \|u\| R \xrightarrow{u \rightarrow \vec{0}} 0 \text{ si } u \rightarrow \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{u \rightarrow \vec{0}} \frac{|h(u)|}{\|u\|} = 0$$

$\therefore h$  es diferenciable en  $\vec{0}$ .

(b) Bueno como  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow Dh$  existe en todo  $\mathbb{R}^m$  (me da)  
y tiene dimensiones  $1 \times m \Rightarrow Dh(x) = (\nabla h(x))^t$ .

$$y Dh(x) = D\left(\underbrace{f(\|\cdot\|)}_{\text{composiciones con}} \cdot \underbrace{g\left(\frac{\cdot}{\|\cdot\|}\right)}_{\text{composiciones con}}\right)(x)$$



Ahora vamos a calcular:

$$D(f(\|\cdot\|) \cdot g(\frac{\cdot}{\|\cdot\|}))(x)$$

$$= (f(\|\cdot\|) \cdot D(g \circ \frac{\cdot}{\|\cdot\|}))(x) + (g(\frac{\cdot}{\|\cdot\|}) D(f \circ \|\cdot\|))(x)$$

¿Porque? ¿Regla del producto?

$$\stackrel{R-C}{=} f(\|x\|) Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \underbrace{Df(\|x\|)}_{f'(\|x\|)} \cdot D(\|x\|)$$

$$= g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) f'(\|x\|) D(\|x\|) + f(\|x\|) Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

Vamos calculando cada término:

$$x \mapsto \|x\| \Rightarrow D(\varphi)(x) = ?$$

Y a ver como calculas que  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$   $\checkmark$  DIF del  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  !!

$$\Rightarrow D(\varphi^2)(x) = 2\varphi D\varphi(x) = x^t D(x) + x^t D(x)$$

$$\Rightarrow 2\|x\| \cdot D\varphi(x) = 2x^t D(x) \rightarrow ? \text{ como se calcula?}$$

$$g \Rightarrow Dg \in M_{m \times m} \text{ pero } \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$x \mapsto g(x) = x$   
 $= (x_1, \dots, x_m)$

$$\Rightarrow Dg(x) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I_{m \times m} \checkmark$$

$$\Rightarrow \boxed{D(x) = I_{m \times m}}$$

$$\Rightarrow \cancel{2\|x\|} D(\|x\|) = 2x^t D(x) = \cancel{2} x^t I_{m \times m}$$

$$\Rightarrow \boxed{D(\|x\|) = x^t / \|x\|} \cdot //$$

es la única forma de usar esto??

Hay otra!! Sea  $r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$  ( $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ )

7

$$\Rightarrow \frac{\partial(r^2)}{\partial x_i} = 2r \frac{\partial r}{\partial x_i} = 2x_i \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}}$$

$$\Rightarrow Dr(x) = \left( \frac{\partial r}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r}{\partial x_m} \right) x = \frac{1}{r} (x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{\|x\|} x^t \Rightarrow \boxed{D(\|x\|) = \frac{x^t}{\|x\|}}$$

QUIZÁ MÁS FÁCIL . //

Volvemos: Ahora calculamos  $D\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

$\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

$x \mapsto g(x) = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} (x_1, \dots, x_m) \Rightarrow Dg \in M_{m \times m}$

$$g_i(x) = \frac{x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^{1/2}} \Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \begin{cases} -\frac{x_i x_j}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{3/2}} & i \neq j \\ \frac{\|x\| \cdot 1 - \frac{x_i^2}{\|x\|}}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^{3/2}} & i = j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{x_i x_j}{\|x\|^3} & i \neq j \\ \frac{1}{\|x\|} - \frac{x_i^2}{\|x\|^3} & i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{1}{\|x\|} I_m - \frac{x \cdot x^t}{\|x\|^3} \quad \leftarrow \text{pensar por que de esto}$$

MEGO:

$$\begin{aligned} Dh(x) &= g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \hat{f}(\|x\|) \frac{x^t}{\|x\|} + f(\|x\|) Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \left(\frac{I_m}{\|x\|} - \frac{x \cdot x^t}{\|x\|^3}\right) \\ &= \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x^t}{\|x\|} + \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{Dg\left(\frac{x}{\|x\|}\right) x \cdot x^t}{\|x\|^2} \right) \end{aligned}$$

TRASPONRIENDO OBTENEMOS  $\nabla h(x)$ , luego:

$$\nabla h(x) = \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x}{\|x\|} + \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{1}{\|x\|^2} (x \cdot x^t)^t \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} &= \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x}{\|x\|} + \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{1}{\|x\|^2} x \cdot \underbrace{x^t \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}_{\langle x, \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle} \right) \end{aligned}$$

$\nearrow \langle a, b \rangle = a^t b$

$$= \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x}{\|x\|} + \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x}{\|x\|^2} \langle x, \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle \right)$$

y nos piden calcular  $\nabla h(x) \cdot x = \langle \nabla h(x), x \rangle$ , hacemos  $\langle \cdot, x \rangle$  a la izquierda

$$\Rightarrow \langle \nabla h(x), x \rangle = \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \underbrace{\langle \frac{x}{\|x\|}, x \rangle}_{\langle \cdot, x \rangle \text{ es lineal}}$$

$$+ \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( \underbrace{\langle x, \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle - \frac{\langle x, \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle \langle x, x \rangle}{\|x\|^2}}_{=0} \right)$$



$$\Rightarrow \langle \nabla h(x), x \rangle = \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \underbrace{\frac{1}{\|x\|}}_{\|x\|^2 / \|x\|} \langle x, x \rangle$$

$$= \hat{f}(\|x\|) \cdot g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \|x\| \cdot \|x\|$$

(c) De la parte anterior

$$\langle \nabla h(x), x \rangle = \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \|x\|$$

$$\Rightarrow \left| \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \|x\| \right| = \underbrace{|\langle \nabla h(x), x \rangle|}_{\text{C-S}} \leq \|\nabla h(x)\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow \text{si } x \neq 0 \Rightarrow \boxed{\left| \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq \|\nabla h(x)\|} \checkmark \checkmark$$

Sea  $y \in \mathbb{R}^m$  tq  $y \perp x$  ( $\langle y, x \rangle = 0$  !!) y recordando que

$$\nabla h(x) = \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{x}{\|x\|} + \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - \frac{x}{\|x\|^2} \langle x, \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle \right)$$

haciendo  $\langle \cdot, y \rangle$  tenemos

$$\langle \nabla h(x), y \rangle = \hat{f}(\|x\|) g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \frac{1}{\|x\|} \cancel{\langle x, y \rangle} +$$

$$\frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \left( \langle \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right), y \rangle - \frac{\langle x, \nabla g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \rangle}{\|x\|^2} \cdot \cancel{\langle x, y \rangle} \right)$$

$$= \frac{f(\|x\|)}{\|x\|} \langle \nabla g(\cdot), y \rangle \cdot \|x\|$$

[P] Guía 3

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

(a) Consideremos los casos  $xy \neq 0$ ,  $xy = 0$  ( $xy = 0, x \neq 0$  v  $xy = 0, y \neq 0$ )

Para  $xy \neq 0 \Rightarrow (x,y) \rightarrow f(x,y) = xy^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$  es derivable por el y.

en ambas variables por álgebra fms derivables a 1-variables respectivamente.

Luego los cálculos  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$   $\forall (x,y)$  tq  $xy \neq 0$  se hace "a mano"

aplicando las reglas de derivación de calc. dif.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \sin\left(\frac{1}{xy}\right) + xy^2 \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \cdot \frac{-1}{(xy)^2} \cdot y = y^2 \left( \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \frac{1}{xy} \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \right) //$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx \sin\left(\frac{1}{xy}\right) + xy^2 \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \cdot \frac{-1}{(xy)^2} \cdot x = 2yx \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \cos\left(\frac{1}{xy}\right) //$$

Para  $xy = 0$ , y  $x \neq 0 \Rightarrow$  Cálculo x definición!!  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(x,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = 0 //$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} x h^2 \sin\left(\frac{1}{x-h}\right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} x \cdot h \sin\left(\frac{1}{x-h}\right) = x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{x-h}\right)}_{\text{"mlt. a acotada"}} = 0 //$$

$\rightarrow xy=0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow x$  o  $\infty$  finitum  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{R} (0,y)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,y) - \cancel{f(0,y)^0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot hy^2 \sin\left(\frac{1}{hy}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} y^2 \sin\left(\frac{1}{hy}\right) = y^2 \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{hy}\right)}_{\nexists} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) \nexists \end{aligned}$$

bastar tomar  $h_n = \frac{1}{n\pi y} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,  $\tilde{h}_n = \frac{1}{y\left(\frac{n\pi}{2}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 $y \neq 0$

$$y \sin\left(\frac{1}{h_n y}\right) = \sin(n\pi) = 0, \quad \sin\left(\frac{1}{\tilde{h}_n y}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^n$$

$\Rightarrow$  las sucesiones  $(h_n)_n, (\tilde{h}_n)_n$  dan  $\neq$  s límites !!!

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,y+h) - \cancel{f(0,y)^0}}{h} = 0 \parallel$$

$\rightarrow xy=0, x=0, y=0 \Rightarrow x$  o  $\infty$  finitum !!

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - \cancel{f(0,0)^0}}{h} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - \cancel{f(0,0)^0}}{h} = 0$$

Resumen  $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y^2 \left( \sin(1/xy) - 1/xy \cos(1/xy) \right) & ; xy \neq 0 \\ 0 & ; xy=0, x \neq 0 \\ \nexists & ; xy=0, y \neq 0 \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2yx \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \cos\left(\frac{1}{xy}\right) & ; xy \neq 0 \\ 0 & ; xy = 0, x \neq 0 \\ 0 & ; xy = 0, y \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) De lo anterior, para  $xy \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  existen y son continuas por algunas fms continuas, luego el teo de la condición suficiente se tiene que  $f$  es diferenciable  $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\text{en } Df(x,y) = \left[ y^2 \left( \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \frac{1}{xy} \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \right) \quad ; \quad 2yx \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \right]$$

(c) La diferenciable en  $(0,0)$  la veremos x definición!

-  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  existen y son  $= 0$  en  $(0,0)$  según (a)!

$\Rightarrow Df(0,0) = [0 \ 0]$  el único candidato !!

chequeamos la condición:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow \vec{0} \\ h = (h_1, h_2)}} \frac{|f(h) - \cancel{f(0,0)} - \overbrace{Df(0,0) \cdot h}^{=0}|}{\|h\|} \stackrel{\text{usamos 11-12}}{=} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(h_1, h_2)|}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}}$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{1/2}} \sin\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right) \right|$$

! Análisis !

$$0 \leq \left| \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right) \right| \leq \frac{|h_1 \cdot h_2^2|}{\sqrt{h_2^2}} \cdot \frac{1}{|h_2|} = |h_1|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{h_1 h_2}\right) \right| \xrightarrow{h \rightarrow (0,0)} 0 \quad (\text{Sandwich !!})$$

$\therefore$   $f$  es diferenciable en  $(0,0)$  .//

(d) Continuidad de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0,0)$ , ya calculamos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \quad ; xy \neq 0$$

entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \stackrel{?}{=} 0$  ← si esto ocurre  
será continua !!

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2yx \sin\left(\frac{1}{xy}\right) - \cos\left(\frac{1}{xy}\right) \sim \text{intuición ?? NO existe !!}$   
why? sen y cos culposos !!

Sea  $a_k = \left( \frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{k} \right)$  clar.  $a_k \rightarrow (0,0)$   
 $k \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a_k) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{k}\right) = \underbrace{2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2k\pi}}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} \underbrace{\sin(2k^2\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(2k^2\pi)}_{=1}$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow \infty} -1 \neq 0$$

$k \rightarrow \infty$

∴ NO es continua en  $(0,0)$



[P] (Guía 3)

14

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , continuo  $x_0 \in \Omega$ ,  $h \mapsto L(h) = a + Bh$ ,  $h \in \mathbb{R}^m$  lineal  
 $a \in \mathbb{R}^m$ ,  $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$  tq  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$  (\*)

$\Rightarrow a = f(x_0)$ ,  $B = Df(x_0)$ ,  $f$  dif en  $x_0$

**Sol**  $\rightarrow$  Como  $f$  es continuo en  $x_0$ , tenemos que  $f$  es Lipschitz!!

$\lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0+h) - f(x_0)\| = 0$ , como  $\|\cdot\|$  es continuo

$\Leftrightarrow \left[ \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0) \right] \leftarrow$  Límite vectorial, Ahí está ~~esto~~ junto

con la condición (\*) implican que  $a = f(x_0)$ , en efecto:

(\*) NOS DICE que, si  $\varepsilon > 0$  cualquiera entonces ~~existe~~ existe  $\delta > 0$

tq  $\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x_0+h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\|$

y como  $L(h) = a + Bh$  es lineal ( $\Rightarrow$  continuo x se Lipschitz)

$\Rightarrow L(h) \rightarrow a$  cuando  $h \rightarrow 0$

JUNTANDO todo tenemos:

$$0 < \|f(x_0+h) - L(h)\| < \varepsilon \|h\| \quad / \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \|f(x_0+h) - L(h)\| = 0 \quad \text{por Sandwich}$$

$$\Rightarrow \left\| \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - L(h) \right\| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) - L(h) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = \lim_{h \rightarrow 0} L(h) = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = f(x_0)}$$

Para el ~~los~~ término, de la definición (\*)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+h) - L(h)\|}{\|h\|} = 0$

según la Ind, tomemos  $h = te_j$  con  $t \in \mathbb{R}$  y  $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  j-ésimo

vector base canónica,  $j = 1, \dots, m$ . Cuando  $h \rightarrow \vec{0} \Leftrightarrow t \rightarrow 0$  <sup>real</sup>  
en este caso. Entonces:

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{\|f(x_0+h) - L(h)\|}{\|h\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+te_j) - L(te_j)\|}{|t| \|e_j\|}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x_0+te_j) - f(x_0) - tBe_j}{t} \right\| = 0$$

donde hemos supuesto s.p.b que  $\|e_j\| = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m$

$$= \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+te_j) - f(x_0) - tBe_j}{t} \right\| = 0 \quad \begin{array}{l} \text{o sea use} \\ \text{continuidad} \\ \text{de } \|\cdot\| \end{array}$$

lo último implica que  $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+te_j) - f(x_0)}{t} = Be_j}$

Por lo  $Be_j = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \stackrel{+}{=} B_j$  i.e. la columna j de B !!



16

$$\text{Pues } \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t} = \left( \frac{f_1(x_0 + te_j) - f_1(x_0)}{t}, \dots, \frac{f_m(x_0 + te_j) - f_m(x_0)}{t} \right)$$

Entonces como  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te_j) - f(x_0)}{t}$  existe y es  $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$  existe y es

$\Rightarrow \forall i=1, \dots, m \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0)}{t} = b_{ij} \quad \leftarrow j \text{ cualquiera de } 1, \dots, m.$

$\nearrow$  lim vectorial  
 $\Leftrightarrow$  lim x componentes cuando todo existe!  
 $= \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}$

$\Rightarrow$  unicidad del límite  $\boxed{\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} = b_{ij}} \quad \forall i=1, \dots, m$   
 $\forall j=1, \dots, m$

Lo aneja a la igualdad matricial:

$\boxed{Df(x_0) = B} \Rightarrow \boxed{L(h) = Df(x_0)h + f(x_0)}$

Def de diferencial / Def en  $x_0$ , así la anterior (\*) resulta ser

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)h\|}{\|h\|} = 0}$$

Por lo tanto  $f$  es dif en  $x_0$  !! .. //

OBS: Así la forma lineal  $L(h) = a + Bh$  por unicidad

tiene que ser  $\boxed{L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h}$   $\rightarrow$  único candidato posible a diferencial de  $f$ .



(P) (Guia 3)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tg

13

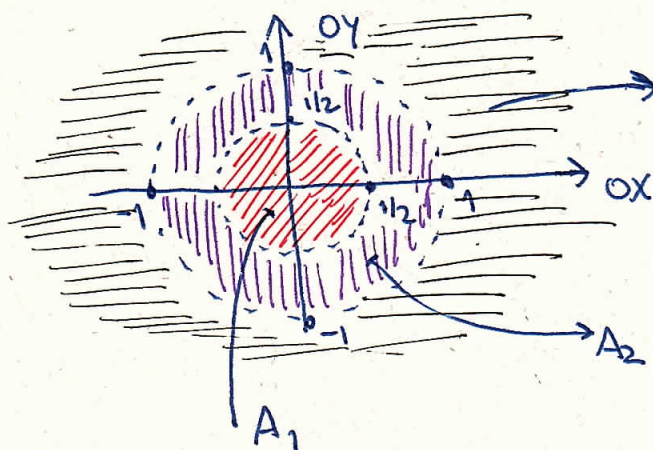
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{17}{4} - x^2 - y^2 & x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2 + y^2} & \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

sol →

(a) Análisis de la continuidad de  $f$ , primeros en los "tramos"  
 la fm está bien def !!

Sea  $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1/4\}$ ,  $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/4 \leq x^2 + y^2 < 1\}$

$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$



$\left. \begin{aligned} & \text{Como en } A_1 \ni (x,y) \\ & \Rightarrow f(x,y) = \frac{17}{4} - x^2 - y^2 \text{ está bien def} \\ & \Rightarrow (x,y) \in A_2 \Rightarrow f = \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ está bien} \\ & \text{definida tb!!} \\ & \Rightarrow (x,y) \in A_3 \Rightarrow f = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ está bien} \\ & \text{def !!} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$

Clara-1.  $f|_{A_1} = \frac{17}{4} - (x^2 + y^2)$  es continua en  $A_1$  (ejercicio a  $A_1$ )

$f|_{A_2} = \frac{1}{x^2 + y^2}$  es continua en  $A_2$  y  $f|_{A_3} = \sqrt{x^2 + y^2}$  es continua en  $A_3$

¿ $f$  es continua (global-1.) en  $\mathbb{R}^2$ ?

Para ello falta analizar que pasa en las respectivas Fronteras!

$$\text{Fr}(A_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}, \text{ sea } (x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_1)$$

si ocurre que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f|_{A_1} = f|_{(x_0,y_0)} \Rightarrow$  tenemos continuidad en  $A_1 \cup A_2$ .

Sea entonces  $(x_k, y_k) \subset A_1$  y  $(x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_1)$  tq  $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x_0, y_0)$

$$\Rightarrow f(x_k, y_k) = \frac{17}{4} - (x_k^2 + y_k^2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{17}{4} - (x_0^2 + y_0^2) = \frac{17}{4} - \frac{1}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Pero  $4 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)$  con  $(x_0, y_0) \in A_2$ , de hecho  $(x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_1) \subset A_2 \checkmark$

Así  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x_0,y_0) \in \text{Fr}(A_1)}}} f(x,y)|_{A_1} = f(x,y)|_{A_2} \Rightarrow$  se extiende la continuidad a  $A_1 \cup A_2 \checkmark$

Similiter en  $\text{Fr}(A_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \vee x^2 + y^2 = 1\}$

Nos interesa  $(x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_2)$  tq  $x_0^2 + y_0^2 > 1$  y veremos que

$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x_0,y_0) \in \text{Fr}(A_2) \\ x_0^2 + y_0^2 > 1}} f|_{A_2} = f|_{(x_0,y_0)}|_{A_3}$  si lo vemos próximo entonces se extiende la continuidad a  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}^2$

Sea  $(x_k, y_k) \subset A_2$  tq  $(x_k, y_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x_0, y_0)$  tq  $x_0^2 + y_0^2 > 1$

$$\Rightarrow \frac{f(x_k, y_k)}{x_k^2 + y_k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} = 1 = \sqrt{1} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = f(x_0, y_0)|_{A_3} \checkmark$$

algebra límite sucesivo en unidades



$\Rightarrow f$  es continua en  $\mathbb{R}^2$  el cual se escribe como  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ . //

(b) Conjuntos de nivel  $N_k(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k\}$   
 $k \in \mathbb{R}$

Como  $\mathbb{R}^2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  (la unión es disjunta!) veamos los niveles admisibles dependiendo donde este  $(x,y)$ !!

$$\rightarrow A_1: f(x,y) = \frac{17}{4} - x^2 - y^2 = k \Leftrightarrow \frac{17}{4} - k = x^2 + y^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Como } (x,y) \in A_1 \text{ se tiene } \frac{1}{4} > \frac{17}{4} - k \geq 0 \Rightarrow \frac{17}{4} \geq k \wedge k \geq \frac{17}{4} - \frac{1}{4} = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{k \in ]4, 17/4]} \xrightarrow{//} \text{en } A_1$$

$$\rightarrow \text{En } A_2: f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2} = k \Leftrightarrow \frac{1}{k} = x^2 + y^2 \text{ pero } x^2 + y^2 \in [1/4, 1[$$

$k > 0$ !!

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \in [1/4, 1[ \Leftrightarrow 1 < k \leq 4 \Rightarrow \boxed{k \in ]1, 4]} \xrightarrow{//} \text{en } A_2$$

$$\rightarrow \text{En } A_3: f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k \Leftrightarrow \frac{1}{k^2} = x^2 + y^2 \geq 1 \Rightarrow 1 \geq k^2$$

$$\Rightarrow 1 - k^2 \geq 0$$

$$(1-k)(1+k) \geq 0$$

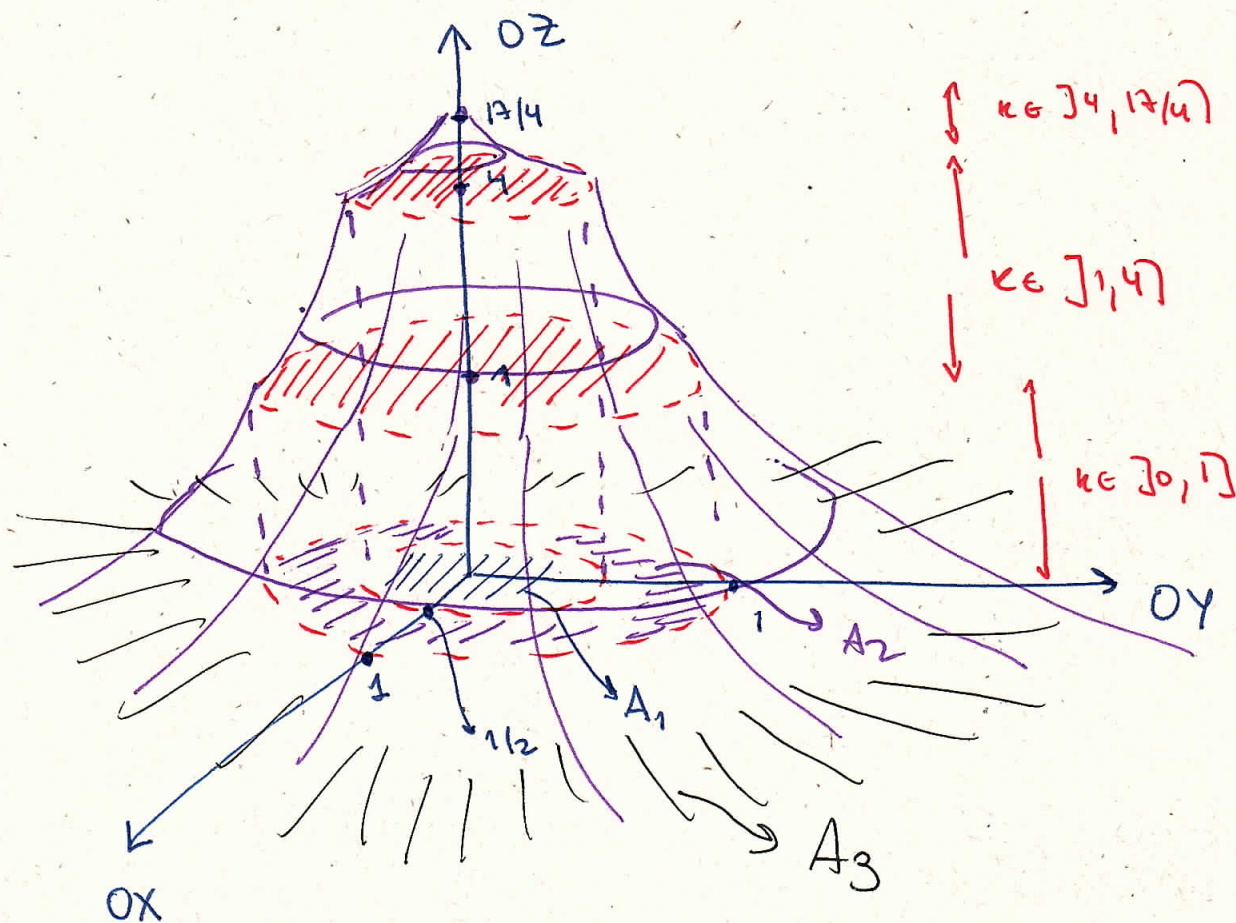
$$\Rightarrow \boxed{k \in ]0, 1]} \checkmark$$

Resumen  $\rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in A_1 \Rightarrow N_k \left( \frac{17}{4} - (x^2 + y^2) \right) \text{ on } k \in ]4, \frac{17}{4}] \\ (x,y) \in A_2 \Rightarrow N_k \left( \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \text{ on } k \in ]1, 4] \\ (x,y) \in A_3 \Rightarrow N_k \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \text{ on } k \in ]0, 1] \end{array} \right.$$

$(k > 0)$

⇒ Temos curvas de nível  $\kappa \in ]0, \frac{17}{4}]$  que los podemos clasificar (a um dibujo) como:



### (c) Estudio de la diferenciabilidad

Si  $(x, y) \in A_1 \Rightarrow f$  es dif. en  $(x, y)$  x álgora

$$\text{y } Df(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & -2y \end{bmatrix} \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

Si  $(x, y) \in A_2 \Rightarrow f$  es dif. en  $\text{Int}(A_2)$  chm. x álgora  $(\frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1)$

$$\text{y } Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \end{bmatrix} \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$$

Si  $(x, y) \in A_3 \Rightarrow f$  es dif. en  $\text{Int}(A_3)$  chm. by álgora.



21

4  $Df(x,y) \in M_{1 \times 2}(\mathbb{R})$  on  $Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$   $(x,y) \in \text{Int}(A_3)$

¿Que se puede decir de la diferenciabilidad de  $f$  cuando  $(x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_2), \text{Fr}(A_3)$  etc?

¿E  $x_0^2 + y_0^2 = 1/4, x_0^2 + y_0^2 = 1$ ?

pg:  $x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{4}$  i.e.  $(x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_1) \cap \text{Fr}(A_2)$

tenemos  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{A_1} = -2x$  y  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\text{int } A_2} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

cuando  $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$  t.q.  $x_0^2 + y_0^2 = 1/4$

se tiene  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{A_1} \xrightarrow{(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)} ? \leftarrow \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\text{int } A_2} (x_n, y_n)$

o sea  $-2x_0 = \frac{-2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^{3/2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{1/4}\right)^{3/2} = 1 \rightarrow \frac{1}{1}$

⇒ Teo cond suficiente no aplica, entonces como veras si  $f$  es dif en  $(x_0, y_0)$  t.q.  $x_0^2 + y_0^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$  DEFINICIÓN (no hay otra opción)

$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}|}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$  ¿? hay que verlo



Vamos al caso  $h_1 \rightarrow 0^+, h_2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow (x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in A_2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + 2x_0h_1 + 2y_0h_2 \\ &= \frac{1}{4} + h_1^2 + h_2^2 + 2(x_0h_1 + y_0h_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = h_1^2 + h_2^2 + 2(x_0h_1 + y_0h_2)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \quad h_1, h_2 > 0$$

$$\left[ \frac{-2x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2}, \frac{-2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} \right]$$

$$= h_1^2 + h_2^2 + 2(x_0h_1 + y_0h_2) - \frac{1}{(1/4)^2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}_{x_0h_1 + y_0h_2}$$

$$= h_1^2 + h_2^2 + 2(x_0h_1 + y_0h_2) + 32(x_0h_1 + y_0h_2)$$

$$= h_1^2 + h_2^2 + 34(x_0h_1 + y_0h_2)$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}|}{\|h\|}$$

$$= \frac{\|h\|^2}{\|h\|} + 34 \frac{(x_0h_1 + y_0h_2)}{\|h\|}$$

$\xrightarrow{\|h\| \rightarrow 0} 0$   
 $\xrightarrow{\|h\|} \frac{1}{\|h\|} \rightarrow 0$   
 $\xrightarrow{\|h\|} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \|h\|} \rightarrow 0$

$\therefore f \not\equiv 0$  es a.F en  $\text{Fr}(A_1) \cap \text{Fr}(A_2)$

Ejercicio: Simule a lo de antes, estúdielo dif de  $f$  en  
 $(x_0, y_0)$  tq  $x_0^2 + y_0^2 = 1$  i.e.  $(x_0, y_0) \in \text{Fr}(A_2) \cap \text{Fr}(A_3)$   
 Ver que sucede!! //

[P] (Guía 4)

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \geq 2$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tq  $f(x) = g(\|x\|)$

$n = \|x\|$ ,  $f$  tiene simetría radial

con  $n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$  norma euclídea !!

(a) Calculamos  $\Delta f := \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$  Laplaciano de  $f$  !!

Como  $g \in C^2$  en todo  $\mathbb{R}$  de la igualdad  $f(x) = g(\|x\|)$  nos dice  
 que las derivadas parciales que necesitamos calcular existen y  
 la composición  $x \mapsto \|x\|$  con  $g$  es diferenciable dos veces al menos.

De la igualdad  $f(x) = g(r)$  tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} Df(x) &= Dg(r) \cdot D(\|x\|) \\ &= \dot{g}(r) \cdot x^t / \|x\| \end{aligned}$$

$$\text{Pero } r^2 = \sum_{j=1}^m x_j^2 \Rightarrow 2r \frac{\partial r}{\partial x_i} = 2x_i \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}}$$

¡¡ oh !!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \dot{g}(r) \frac{x_i}{r}}$$

$i = 1, \dots, m \quad x \in \mathbb{R}^m$

\*obs:  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  2 abstrusos (!)



$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g'(r) \frac{x_i}{r} \right)(x) \quad \forall i=1, \dots, m$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( g'(r) \right)(x) \cdot \frac{x_i}{r} + g'(r) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} \right)(x)$$

$$= \frac{\partial g'(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{r} + g'(r) \cdot \left( \frac{r \cdot 1 - \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot x_i}{r^2} \right)$$

$$= g''(r) \cdot \left( \frac{x_i}{r} \right)^2 + g'(r) \cdot \left( \frac{r - \frac{x_i^2}{r}}{r^2} \right)$$

$$= g''(r) \left( \frac{x_i}{r} \right)^2 + g'(r) \cdot \left( \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \right) \quad //$$

$$\Rightarrow \Delta f(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{i=1}^m g''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + \sum_{i=1}^m g'(r) \left( \frac{r^2 - x_i^2}{r^3} \right)$$

$$= \frac{g''(r)}{r^2} \underbrace{\sum_{i=1}^m x_i^2}_{=r^2} + \frac{g'(r)}{r^3} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^m r^2}_{r^2(m-1)} - \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta f(x) = g''(r) + \frac{(m-1)g'(r)}{r}}$$



(b) Como  $\Delta f = 0$ , de la parte anterior tenemos que

$$g''(r) + \frac{(m-1)}{r} g'(r) = 0 \Leftrightarrow g''(r) = -\frac{(m-1)}{r} g'(r)$$

y esta última es una EDO a variables separables para  $g'$

si  $g'(r) = 0 \Rightarrow g(r) = \text{cte}$  y se tiene la representación en  $a = 0$

si no,  $\frac{dg'}{g'} = -\frac{(m-1)}{r} dr$  separando variables!  $\int$

$$\Rightarrow \ln(g'(r)) = -(m-1) \ln(Ar) \text{ con } A \in \mathbb{R}_+$$

$$\Rightarrow g'(r) = \tilde{A} r^{-(m-1)} \quad \int$$

$$= \begin{cases} A \ln(r) + B & \text{si } m=2 \\ \frac{\tilde{A} r^{-(m-1)+1}}{1-(m-1)} + \tilde{B} & m \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{g(r)}_{\text{flu}} = \begin{cases} A \ln(r) + B & \text{si } m=2 \\ \tilde{A} r^{2-m} + \tilde{B} & \text{si } m \geq 3 \end{cases}$$

recordemos  
constantes!