

Auxiliar 8: Regla de la Cadena

Profesor: Alexander Frank M.
 Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 [C2 2011-2] [Regla de la Cadena]

(a) Decimos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado p si

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0$$

Demuestre que si f es diferenciable y homogénea de grado p entonces

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Hint: Considere la función $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Psi(\lambda) = f(\lambda x)$

(b) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones dos veces derivables. Defina $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$z(x, y) = x f(x + y) + y g(x + y).$$

Pruebe que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

P2 [C2 2016-2 - Leseigneur]

(a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Considere que el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^n$ está descrito por la siguiente ecuación

$$\dot{x}(t) = -\nabla \varphi(x(t)) \quad \dot{x}(t) := \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t), \frac{\partial x_2}{\partial t}(t), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t}(t) \right)^T$$

donde $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$, que denota la posición de la partícula en el tiempo y supongamos que la posición inicial de la partícula es $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\varphi(x(t))$ es decreciente en el tiempo. Muestre además que

$$\varphi(x(t)) + \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = \varphi(x_0)$$

(b) Suponga ahora que el movimiento de la partícula está descrito por otra ecuación.

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) = -\nabla \varphi(x(t))$$

donde $\alpha > 0$ representa el roce viscoso que afecta a la partícula. Muestre que la energía total de la partícula $E(t)$ es decreciente en el tiempo, donde

$$E(t) = \frac{1}{2} \|\dot{x}(t)\|^2 + \varphi(x(t)) \quad \text{y muestre además que} \quad E(t) + \alpha \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = E(0)$$

P3 [Ecuación de Transporte] Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación de transporte nohomogénea con coeficientes constantes, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \langle b, \nabla u(x, t) \rangle = f(x, t) \text{ para todo } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

donde $b \in \mathbb{R}^n$ es constante y las funciones $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son conocidas. Además, f es de clase $C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ y g es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$. La función $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la incógnita, donde entendemos el gradiente considerado solo en las variables espaciales, es decir, $\nabla u = \nabla_x u$. Se propone considerar la función real dada por $z(s) := u(x + sb, t + s)$. Pruebe que $z'(s) = f(x + sb, t + s)$ y deduzca con esto que

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds$$

resuelve el problema dado por (1) y (2).

Ind: Recuerde que para una función h diferenciable se tiene que $h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h'(s) ds$.

P4 [Propuesto] [C2 2019-1] Suponga que $z : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 , que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Considere el cambio de variables definido por $u(x, y) = x + y, v(x, y) = \frac{y}{x}$, y la nueva función $\omega = \omega(u, v)$ definida por $z(x, y) = x\omega(u(x, y), v(x, y))$. Demostrar que la ecuación que satisface la función $\omega(u, v)$ es

$$\frac{(1+v)^3}{u} \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}(u, v) = 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}_+^2$$

Resumen

Corolario(Regla de la Cadena) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x , g es diferenciable en $f(x)$ y denotamos $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ a la función $F = g \circ f$. Entonces se tiene que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$

Observación: El corolario anterior es directo de usar

$$(DF(x))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

y la regla de la cadena mediante

$$\begin{aligned} (D(g \circ f)(x))_{ij} &= (Dg(f(x))Df(x))_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

Definición(Gradiente) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x , denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x , i.e.,

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^T$$

Corolario Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces para $\Psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\Psi = f \circ \gamma$ se tiene que

$$\frac{d\Psi}{dt}(t) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

donde $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t) \dots \gamma'_n(t))^T$

Teorema: Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces el vector unitario $v_0 = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$ representa la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x_0

Teorema: El gradiente $\nabla f(x)$ es siempre ortogonal (o normal) a la curva de nivel que pasa por x

P1 [C2 2011-2] [Regla de la Cadena]

(a) Decimos que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado p si

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0$$

Demuestre que si f es diferenciable y homogénea de grado p entonces

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Hint: Considere la función $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Psi(\lambda) = f(\lambda x)$

Dem: Tenemos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda > 0$$

Consideremos $\Psi(\lambda) = f(\lambda x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo

Por un lado como f es homogénea de grado p

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \Psi(\lambda) &= \frac{d}{d\lambda} f(\lambda x) = \frac{d}{d\lambda} (\lambda^p f(x)) (\lambda) \\ &= p \lambda^{p-1} f(x) \end{aligned}$$

Por otro lado, derivemos $\Psi(\lambda)$ usando la regla de la Cadena

Para ello, consideremos $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ para x fijo
 $\lambda \rightarrow \lambda x$

Tenemos que

$$D\varphi(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(\lambda) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_n(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \varphi_i(\lambda) = \lambda x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_i(\lambda) = x_i$$

Por otro lado

$$\psi(\lambda) = f \circ \varphi(\lambda)$$

Usando la regla de la cadena con $u=1$, $u=u$, $p=1$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda} \psi(\lambda) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda}(\lambda) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) x_i\end{aligned}$$

$$= \langle \nabla f(\lambda x), x \rangle$$

luego $p\lambda^{p-1}f(x) = \langle \nabla f(\lambda x), x \rangle$, por lo que
para $\lambda=1$ concluimos

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = pf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(b) Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones dos veces derivables. Defina $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$z(x, y) = xf(x+y) + yg(x+y).$$

Pruebe que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Dem: Calculamos cada término usando la regla de la cadena
Definimos $\pi_x(x, y) = x$, $\pi_y(x, y) = y$,
Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} [xf(x+y) + yg(x+y)] \\ &= \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x} f(x+y)}_{\text{Regla del Producto}} + x \frac{\partial}{\partial x} f(x+y) + y \frac{\partial}{\partial x} g(x+y)\end{aligned}$$

Consideramos $\psi(x,y) = x+y$, entonces $f(x+y) = (f \circ \psi)(x,y)$
y entonces por regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x+y) &= \frac{\partial}{\partial x} (f \circ \psi)(x,y) = f'(\psi(x,y)) \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y)}_{=1} \\ &= f'(x+y)\end{aligned}$$

De igual forma $\frac{\partial}{\partial x} g(x+y) = g'(x+y)$, luego

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = f(x+y) + x f'(x+y) + y g'(x+y)$$

Análogamente

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = x f'(x+y) + g(x+y) + y g'(x+y)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\bullet) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f(x+y) + x f'(x+y) + y g'(x+y) \right] \\ &= f'(x+y) + \underbrace{f'(x+y)}_{2f'(x+y)} + \underbrace{x f''(x+y)}_{\text{Regla del Producto}} + y g''(x+y)\end{aligned}$$

$$\bullet) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right](x,y)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[x f'(x+y) + g(x+y) + y g'(x+y) \right]$$

$$= f'(x+y) + \underbrace{x f''(x+y)}_{\text{R. Producto}} + g'(x+y) + y g''(x+y)$$

$$\bullet) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[x f'(x+y) + g(x+y) + y g'(x+y) \right]$$

$$= x f''(x+y) + g'(x+y) + \underbrace{g'(x+y)}_{2g'(x+y)} + y g''(x+y)$$

Sumando Tenemos Para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)$$

$$= \cancel{2f'(x+y)} + \cancel{x f''(x+y)} + \cancel{y g''(x+y)}$$

$$- 2 \left(\cancel{f'(x+y)} + \cancel{x f''(x+y)} + \cancel{g'(x+y)} + \cancel{y g''(x+y)} \right)$$

$$+ \cancel{2g'(x+y)} + \cancel{x f''(x+y)} + \cancel{y g''(x+y)}$$

$$= 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

P2 [C2 2016-2 - Leseigneur]

- (a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Considere que el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^n$ está descrito por la siguiente ecuación

$$\dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t)) \quad \dot{x}(t) := \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t), \frac{\partial x_2}{\partial t}(t), \dots, \frac{\partial x_n}{\partial t}(t) \right)^T$$

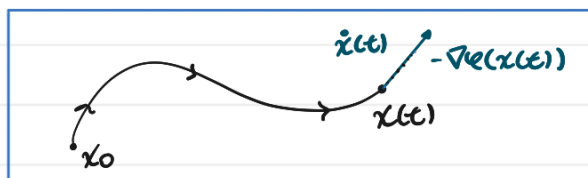
donde $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^2 , que denota la posición de la partícula en el tiempo y supongamos que la posición inicial de la partícula es $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\varphi(x(t))$ es decreciente en el tiempo. Muestre además que

$$\varphi(x(t)) + \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = \varphi(x_0)$$

(e) Tenemos una dinámica de la forma

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Interpretación Notar que $-\nabla\varphi(x(t))$ corresponde a la dirección de mayor decrecimiento de φ en el punto $x(t)$. Por lo tanto, estamos pidiendo que la trayectoria $x(t)$ que describe la dinámica sea tal que en cada tiempo $t \in [0, +\infty)$, su velocidad $\dot{x}(t)$ apunte en la dirección en donde más decrece φ localmente.



Dem. Veamos que $\varphi(x(t))$ es decreciente, puesto que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^2 y $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 , tenemos que $(\varphi \circ x)$ es diferenciable.

P.D.Q. $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(x(t)) \leq 0 \quad (\Leftrightarrow \varphi(x(t)) \text{ es decreciente})$

Por regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \circ x)(t) = D\varphi(x(t)) D x(t) = \langle \nabla\varphi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$$

Recordemos que si $x(t)$ es solución de la dinámica, entonces $\dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\varphi \circ x)(t) &= \langle \nabla\varphi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle = \langle -\dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle \\ &= -\underbrace{\|\dot{x}(t)\|^2}_{\geq 0} \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)\end{aligned}$$

Por lo que $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty)$, luego $\varphi(x(t))$ es decreciente en el tiempo

De esto último, usando que $x(0) = x_0$ y el hecho que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x(t)) &= -\|\dot{x}(t)\|^2 \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x(t)) dt &= \int_0^t -\|\dot{x}(t)\|^2 dt \\ \Rightarrow \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) &= \int_0^t -\|\dot{x}(t)\|^2 dt \\ \Rightarrow \varphi(x(t)) + \int_0^t \|\dot{x}(t)\|^2 dt &= \varphi(x_0)\end{aligned}$$

(b) Suponga ahora que el movimiento de la partícula está descrito por otra ecuación.

$$\ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t))$$

donde $\alpha > 0$ representa el roce viscoso que afecta a la partícula. Muestre que la energía total de la partícula $E(t)$ es decreciente en el tiempo, donde

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + \varphi(x(t)) \quad \text{y muestre además que} \quad E(t) + \alpha \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = E(0)$$

Dem: Tenemos ahora la dinámica

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Consideremos la energía total de la partícula en tiempo t
Como

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + \varphi(x(t))$$

Notemos que es diferenciable pues x es C^2 y φ es C^1 ,
Vemos

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \| \dot{x}(t) \|^2 + \varphi(x(t)) \right)$$

Recordemos que $\nabla(\|u\|^2)(x) = 2x$ (Aux 6, Formas Cuadráticas)
Luego, Por la regla de la Cadena

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\|u\|^2 \circ \dot{x})(t) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x(t))$$

$$= \frac{1}{2} \langle \nabla \|u\|^2(\dot{x}(t)), \ddot{x}(t) \rangle + \langle \nabla \varphi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle 2\dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle + \langle \nabla \varphi(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$$

Puesto que $-\nabla \varphi(x(t)) = \ddot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t)$

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t) = \langle \dot{x}(t), \ddot{x}(t) \rangle + \langle -\ddot{x}(t) - \alpha \dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle$$

$$= \langle \cancel{\dot{x}(t)}, \cancel{\ddot{x}(t)} \rangle - \langle \cancel{\ddot{x}(t)}, \cancel{\dot{x}(t)} \rangle - \alpha \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle$$

$$= - \underbrace{\alpha \| \dot{x}(t) \|^2}_{\geq 0} \leq 0$$

Entonces $E(t)$ es decreciente en el tiempo, Por lo demás

$$\int_0^t \frac{\partial E}{\partial t}(t) dt = \int_0^t -\alpha \| \dot{x}(t) \|^2 dt$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t) + \alpha \int_0^t \| \dot{x}(s) \|^2 ds = E(0)}$$

P3 [Ecuación de Transporte] Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación de transporte nohomogénea con coeficientes constantes, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \langle b, \nabla u(x, t) \rangle = f(x, t) \text{ para todo } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \quad (1)$$

$$u(x, 0) = g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

donde $b \in \mathbb{R}^n$ es constante y las funciones $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son conocidas. Además, f es de clase $C^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ y g es de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$. La función $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es la incógnita, donde entendemos el gradiente considerado solo en las variables espaciales, es decir, $\nabla u = \nabla_x u$. Se propone considerar la función real dada por $z(s) := u(x + sb, t + s)$. Pruebe que $z'(s) = f(x + sb, t + s)$ y deduzca con esto que

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) ds$$

resuelve el problema dado por (1) y (2).

Ind: Recuerde que para una función h diferenciable se tiene que $h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h'(s) ds$.

Dem: Consideremos la función $z(s) = u(x + sb, t + s)$ con $s \in [-t, +\infty)$ y $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ fijo (pero arbitrario). Además, consideremos $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ como $\varphi(s) = \begin{pmatrix} x + sb \\ t + s \end{pmatrix}$ luego $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

Por regla de la cadena,

$$\begin{aligned} z'(s) &= \frac{\partial z}{\partial s}(s) = \frac{\partial}{\partial s} (u \circ \varphi)(s) = D u(\varphi(s)) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) \\ &= \left\langle \nabla_x u(\varphi(s)), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) \right\rangle, \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x + sb, t + s) + \langle b, \nabla u(x + sb, t + s) \rangle \end{aligned}$$

luego si $u(x, t)$ solución (1) tenemos que

$$z'(s) = f(x + sb, t + s)$$

Por lo demás, notemos que $z(0) = u(x, t)$ y También $z(-t) = u(x - tb, 0)$, luego si $u(x, t)$ satisface (2), tenemos $z(-t) = g(x - tb)$

siguiendo la indicación

$$z(0) - z(-\tau) = \int_{-\tau}^0 z'(s) ds$$

$$\Rightarrow u(x,t) = g(x-\tau b) + \int_{-\tau}^0 f(x+sb, t+s) ds$$

Haciendo el c.v $s' = t + s$ en la integral, $ds' = ds$ y

$$\int_{-\tau}^0 f(x+sb, t+s) ds = \int_0^{\tau} f(x+(s'-t)b, s') ds'$$

Por lo tanto, como (x,t) es arbitrario, concluimos que si $u(x,t)$ cumple (1) y (2) entonces

$$u(x,t) = g(x-\tau b) + \int_0^{\tau} f(x+(s-t)b, s) ds$$