Auxiliar 8: Regla de la Cadena

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[C2 2011-2] [Regla de la Cadena]**

(a) Decimos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado p si

$$f(\lambda x) = \lambda^p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0$$

Demuestre que si f es diferenciable y homogénea de grado p entonces

$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = p f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Hint: Considere la función $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\Psi(\lambda) = f(\lambda x)$

(b) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones dos veces derivables. Defina $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$z(x, y) = x f(x + y) + y g(x + y).$$

Pruebe que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

P2 **[C2 2016-2 - Leseigneur]**

(a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Considere que el movimiento de una partícula en $\mathbb{R}^n$ está descrito por la siguiente ecuación

$$\dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t)) \quad \dot{x}(t) := \left(\frac{\partial x_1}{\partial t}(t), \frac{\partial x_2}{\partial t}(t), \cdots, \frac{\partial x_n}{\partial t}(t)\right)^T$$

donde $x : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$, que denota la posición de la partícula en el tiempo y supongamos que la posición inicial de la partícula es $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\varphi(x(t))$ es decreciente en el tiempo. Muestre además que

$$\varphi(x(t)) + \int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = \varphi(x_0)$$

(b) Suponga ahora que el movimiento de la partícula está descrito por otra ecuación.

$$\ddot{x}(t) + \alpha\dot{x}(t) = -\nabla\varphi(x(t))$$

donde $\alpha > 0$ representa el roce viscoso que afecta a la partícula. Muestre que la energía total de la partícula $E(t)$ es decreciente en el tiempo, donde

$$E(t) = \frac{1}{2}\|\dot{x}(t)\|^2 + \varphi(x(t)) \quad \text{y muestre además que} \quad E(t) + \alpha\int_0^t \|\dot{x}(s)\|^2 ds = E(0)$$

$\boxed{\textbf{P3}}$ **[Ecuación de Transporte]** Consideremos el problema de valor inicial para la ecuación de transporte nohomogénea con coeficientes constantes, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \langle b, \nabla u(x,t)\rangle = f(x,t) \text{ para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \tag{1}$$

$$u(x,0) = g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

donde $b \in \mathbb{R}^n$ es constante y las funciones $f : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son conocidas. Además, f es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y g es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$. La función $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es la incógnita, donde entendemos el gradiente considerado solo en las variables espaciales, es decir, $\nabla u = \nabla_x u$. Se propone considerar la función real dada por $z(s) := u(x+sb, t+s)$. Pruebe que $z'(s) = f(x+sb, t+s)$ y deduzca con esto que

$$u(x,t) = g(x-tb) + \int_0^t f(x+(s-t)b, s)\mathrm{d}s$$

resuelve el problema dado por (1) y (2).

Ind: Recuerde que para una función h diferenciable se tiene que $h(t_2) - h(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} h'(s)\mathrm{d}s$.

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[Propuesto] [C2 2019-1]** Suponga que $z : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$, que satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Considere el cambio de variables definido por $u(x,y) = x+y, v(x,y) = \frac{y}{x}$, y la nueva función $\omega = \omega(u,v)$ definida por $z(x,y) = x\omega(u(x,y), v(x,y))$. Demostrar que la ecuación que satisface la función $\omega(u,v)$ es

$$\frac{(1+v)^3}{u}\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2_+$$

Resumen

Corolario(Regla de la Cadena) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x, g es diferenciable en $f(x)$ y denotamos $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a la función $F = g \circ f$. Entonces se tiene que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

para todo $i \in \{1, \cdots, p\}$ y $j \in \{1, \cdots, n\}$

Observación: El corolario anterior es directo de usar

$$(DF(x))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

y la regla de la cadena mediante

$$(D(g \circ f)(x))_{ij} = (Dg(f(x))Df(x))_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

Definición(Gradiente) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x, denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x, i.e,

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$$

Corolario Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^n$, entonces para $\Psi : I \to \mathbb{R}$ dado por $\Psi = f \circ \gamma$ se tiene que

$$\frac{d\Psi}{dt}(t) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

donde $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t) \cdots \gamma_n'(t))^T$

Teorema: Si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces el vector unitario $v_0 = \frac{\nabla f(x_0}{\|\nabla f(x_0)\|}$ representa la dirección de máximo crecimiento de f en el punto x_0

Teorema: El gradiente $\nabla f(x)$ es siempre ortogonal (o normal) a la curva de nivel que pasa por x