Auxiliar 7: Derivadas Parciales

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[C2 2014-1]** Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$

(c) Muestre que f no es de clase C^1. ¿Es esto una contradicción? Argumente

P2 **[Ecuación de Laplace]** Sea $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Definimos el *Laplaciano* de u denotado por Δu como la función

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

El objetivo de esta pregunta es determinar una solución para la *ecuación de Laplace*,

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1}$$

cuando la función u presenta una simetría radial, es decir, existe $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = v(r) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

donde $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

(a) Demuestre que si u tiene simetría radial entonces

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

(b) Deduzca a partir de lo anterior soluciones de la *ecuación de Laplace*

(c) Considere ahora la *ecuación de Poisson* para f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Resuelva la ecuación cuando $f = \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}}$ con $\alpha \neq \frac{n}{2}, \alpha \neq 1$, para ello considere que $v(r)$ es una solución de la forma $v(r) = Ar^{\beta}$

$\boxed{\textbf{P3}}$ Sea $u(x,t)$ una función diferenciable a valores en $\mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Considere además $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(t) = u(f(t),t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = u(f(t),t)$ es constante.

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[C2 2018-2][Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 una solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Considere las funciones $u(x,y) = x + y, v(x,y) = x - y$, demuestre que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ también satisface la *ecuación de Laplace*.

Resumen

Definición(Derivada Direccional). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es derivable en x en la dirección v si existe el límite:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

En tal caso denotamos dicho límite por $Df(x;v)$

Definición(Derivada Parcial). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $e_i \in (e_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ vector de la base canónica. Definimos la derivada parcial de f con respecto a x_i en x a la cantidad (de existir)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

Teorema. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in U$ abierto. Entonces necesariamente $Df(x)$ es la matriz conformada por las derivadas parciales, esto es,

$$(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

para $i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\}$

Definición(Gradiente) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x, denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x, i.e,

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)^T$$

Notar que con esta definición podemos escribir $Df(x)h = \langle \nabla f(x), h\rangle$

Teorema(Regla de la Cadena). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$. Entonces se tiene que:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Corolario(Regla de la Cadena) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x, g es diferenciable en $f(x)$ y denotamos $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a la función $F = g \circ f$. Entonces se tiene que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

para todo $i \in \{1,\cdots,p\}$ y $j \in \{1,\cdots,n\}$

Observación: El corolario anterior es directo de usar

$$(DF(x))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

y la regla de la cadena mediante

$$(D(g\circ f)(x))_{ij} = (Dg(f(x))Df(x))_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

Parte Aux 7

P1 **[C2 2014-1]** Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$

(c) Muestre que f no es de clase C^1. ¿Es esto una contradicción? Argumente

(a) Sabemos por álgebra y comp. de funciones continuas y diferenciables que f es continua y diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Respecto de esto último, basta notar que las funciones que componen f tienen derivadas parciales de clase C^1 en $\mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$

(b) Notemos que f es continua en $(0,0)$ pues

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}_{\text{Acotado}} = 0$$

Veamos si f es diff en $(0,0)$. Si f es diff, la derivada debe estar dada por las derivadas parciales.

Calculando

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h} = h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) = 0$$

luego si f es diff debe ser que $Df(0,0) = [\,0 \quad 0\,]$, verificamos que es la derivada usando la definición

Estudiamos el límite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - \cancel{f(0,0)}^{\to 0} - \cancel{Df(0,0)}^{\to 0}(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Desarrollando Tenemos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\to 0}\ \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}_{\text{Acotado}} = 0$$

Por lo tanto f es diff en $(0,0)$

(c) Veamos que f no es de clase C^1, Calculamos las derivadas parciales de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (solo $\frac{\partial}{\partial x}$ s.p.g)

Tenemos $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + (x^2+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

Notemos que $2x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \to 0$ si $(x,y) \to (0,0)$

Pero

$$\left| -\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| = \underbrace{\left|\frac{2x}{x^2+y^2}\right|}_{\text{no converge}} \underbrace{\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right|}_{\not\to 0 \text{ (se mantiene acotado y no converge)}}$$

Donde vemos que $\left|\frac{2x}{x^2+y^2}\right|$ no converge, por ejemplo tomando $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n) \to (0,0)$ Tenemos

$$\left|\frac{2/n}{2/n^2}\right| = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$, pues no converge a 0

y entonces f no es C^1

Recuerdo: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

El resultado anterior no es contradictorio pues,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \text{ continuas} \Rightarrow Df(x) \text{ existe}$$

Pero de forma general

$$Df(x) \text{ existe} \not\Rightarrow \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \text{ continuas}$$

P2 **[Ecuación de Laplace]** Sea $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Definimos el *Laplaciano* de u denotado por Δu como

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

El objetivo de esta pregunta es determinar una solución para la *ecuación de Laplace*, definida como la función

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1}$$

cuando la función u presenta una simetría radial, es decir, existe $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = v(r) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

donde $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

(a) Demuestre que si u tiene simetría radial entonces

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

(a) Consideremos que u es radial, luego

$$u(x) = v(r(x)) = v(\|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

luego $u = v \circ r$, usando la regla de la cadena

$$Du(x) = Dv(r(x)) Dr(x) = [v'(r)] \left[\frac{\partial r}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial r}{\partial x_n} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial v}{\partial r}(r(x)) \frac{\partial r}{\partial x_i}(x)$$

Donde $r(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, luego

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r(x)}$$

Entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = v'(r) \frac{x_i}{r}$, por lo tanto

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = \underbrace{\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} v'(r)}_{(1)} \cdot \frac{x_i}{r} + v'(r) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{r}}_{(2)}}_{\text{Regla del Producto}}$$

Por un lado, por regla de la cadena

$$\frac{\partial}{\partial x_i} v'(r(x)) = \frac{\partial v'}{\partial r}(r(x)) \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = v''(r)\frac{x_i}{r}$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r}(x) = \frac{\cancel{\frac{\partial x_i}{\partial x_i}}^{1}(x)\, r(x) - \frac{\partial r}{\partial x_i} x_i}{r^2(x)}$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

Entonces

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(v''(r)\frac{x_i}{r}\right)\left(\frac{x_i}{r}\right) + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)$$

$$= v''(r) \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{r^2}}^{1} + v'(r)\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}}_{= \frac{n-1}{r}}\right)$$

Usando que $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ concluimos

$$\boxed{\Delta u(x) = v''(r) + \frac{(n-1)}{r} v'(r)}$$

(b) Deduzca a partir de lo anterior soluciones de la *ecuación de Laplace*

(b) Supongamos u una función radial tal que

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\iff v''(r) + \frac{(n-1)}{r} v'(r) = 0 \quad \forall r > 0$$

Resolvemos la EDO para encontrar qué forma tiene v

Desarrollando

$$\frac{v''(r)}{v'(r)} = \frac{1-n}{r} \Rightarrow \int \frac{v''(r)}{v'(r)} dr = \int \frac{1-n}{r}$$

$$\iff \ln(v'(r)) = (1-n)\ln(r) + e = \ln(r^{1-n}) + e$$

$$\Rightarrow v'(r) = e^{\ln(r^{1-n})+e} = \frac{a}{r^{n-1}}$$

Donde a es una constante, luego

$$v(r) = \int \frac{a}{r^{n-1}} dr = \begin{cases} b\ln r + c & (n=2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

donde b y c son constantes

Puesto que $u(x) = v(\|x\|)$, concluimos con las soluciones de la ec. $\Delta u = 0$ como

$$\boxed{u(x) = \begin{cases} b\ln(\|x\|) + c & (n=2) \\ \dfrac{b}{\|x\|^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}}$$

(c) Considere ahora la *ecuación de Poisson* para f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Resuelva la ecuación cuando $f = \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}}$ con $\alpha \neq \frac{n}{2}, \alpha \neq 1$, para ello considere que $v(r)$ es una solución de la forma $v(r) = Ar^\beta$

(c) Suponiendo que u es radial tenemos la ecuación

$$v''(r) + \frac{(n-1)}{r} v'(r) = \frac{1}{r^{2\alpha}} \quad \forall r > 0$$

Considerando $v(r) = Ar^\beta$, tenemos la ecuación

$$A\beta(\beta-1) r^{\beta-2} + \frac{(n-1)}{r} A\beta r^{\beta-1} = r^{-2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow A\beta(\beta-1+n-1) r^{\beta-2} = r^{-2\alpha}$$

Imponemos $\beta - 2 = -2\alpha \Leftrightarrow \beta = 2-2\alpha$, luego tenemos

$$A(\underbrace{2-2\alpha}_{\beta})(n-2\alpha) \cancel{r^{\beta-2}} = \cancel{r^{\beta-2}}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{(2-2\alpha)(n-2\alpha)}$$

Por lo tanto, como $v(r) = Ar^\beta$, tenemos

$$v(r) = \frac{1}{(2-2\alpha)(n-2\alpha)} r^{2-2\alpha}$$

luego una solución para la ecuación de Poisson con $f(x) = \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}}$ es

$$\boxed{u(x) = \frac{\|x\|^{2-2\alpha}}{(2-2\alpha)(n-2\alpha)}}$$

P3 Sea $u(x,t)$ una función diferenciable a valores en $\mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Considere además $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(t) = u(f(t),t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = u(f(t),t)$ es constante.

Notemos que $g = u \circ \varphi$, donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ t \end{pmatrix}$$

Luego φ es diff con derivada

$$D\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\varphi(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como u y f son diff $\Rightarrow$ g es diff en todo $t \in \mathbb{R}$

Por lo tanto para ver que es constante, probaremos que

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Mediante la regla de la cadena, como $g = u \circ f$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = Du(\varphi(t))D\varphi(t)$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t)) \ \frac{\partial u}{\partial t}(\varphi(t)) \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\varphi(t)) \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(f(t),t)\, f'(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(f(t),t)\cdot 1$$

Tenemos que $f'(t) = u(f(t),t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, luego

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \frac{\partial u}{\partial x}\, u(f(t),t) + \frac{\partial u}{\partial t}(f(t),t)$$

Puesto que u soluciona la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces, en particular,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\, u(f(t),t) + \frac{\partial u}{\partial t}(f(t),t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto $g(t) = u(f(t),t)$ es constante en $\mathbb{R}$