Auxiliar 7: Derivadas Parciales

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[C2 2014-1]** Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(b) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de f en $(0,0)$

(c) Muestre que f no es de clase C^1. ¿Es esto una contradicción? Argumente

P2 **[Ecuación de Laplace]** Sea $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Definimos el *Laplaciano* de u denotado por Δu como la función

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

El objetivo de esta pregunta es determinar una solución para la *ecuación de Laplace*,

$$\Delta u = 0 \text{ en } \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{1}$$

cuando la función u presenta una simetría radial, es decir, existe $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = v(r) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

donde $r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

(a) Demuestre que si u tiene simetría radial entonces

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

(b) Deduzca a partir de lo anterior soluciones de la *ecuación de Laplace*

(c) Considere ahora la *ecuación de Poisson* para f una función de clase $C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\Delta u = f \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Resuelva la ecuación cuando $f = \frac{1}{\|x\|^{2\alpha}}$ con $\alpha \neq \frac{n}{2}, \alpha \neq 1$, para ello considere que $v(r)$ es una solución de la forma $v(r) = Ar^\beta$

P3 Sea $u(x,t)$ una función diferenciable a valores en $\mathbb{R}$ que satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Considere además $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(t) = u(f(t),t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = u(f(t),t)$ es constante.

P4 **[C2 2018-2][Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 una solución de la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Considere las funciones $u(x,y) = x + y, v(x,y) = x - y$, demuestre que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ también satisface la *ecuación de Laplace*.

Resumen

Definición(Derivada Direccional). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es derivable en x en la dirección v si existe el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

En tal caso denotamos dicho límite por $Df(x;v)$
Definición(Derivada Parcial). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $e_i \in (e_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ vector de la base canónica. Definimos la derivada parcial de f con respecto a x_i en x a la cantidad (de existir)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) := \lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

Teorema. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x \in U$ abierto. Entonces necesariamente $Df(x)$ es la matriz conformada por las derivadas parciales, esto es,

$$(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

para $i \in \{1,\cdots,m\}, j \in \{1,\cdots,n\}$
Definición(Gradiente) Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x \in U$ abierto. Definimos el gradiente de f en x, denotado $\nabla f(x)$ como el vector de $\mathbb{R}^n$ compuesto por las derivadas parciales de f en x, i.e,

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))^T$$

Notar que con esta definición podemos escribir $Df(x)h = \langle \nabla f(x), h\rangle$

Teorema(Regla de la Cadena). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$. Entonces se tiene que:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Corolario(Regla de la Cadena) Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x, g es diferenciable en $f(x)$ y denotamos $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a la función $F = g \circ f$. Entonces se tiene que:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

para todo $i \in \{1,\cdots,p\}$ y $j \in \{1,\cdots,n\}$
Observación: El corolario anterior es directo de usar

$$(DF(x))_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)$$

y la regla de la cadena mediante

$$(D(g \circ f)(x))_{ij} = (Dg(f(x))Df(x))_{ij}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$