Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA2001-2 – Cálculo en Varias Variables

Guía de estudio 3

Temas: Diferenciabilidad y Derivadas Parciales

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua en $x_0 \in \Omega$ abierto. Para $a \in \mathbb{R}^m$ y $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ considere la función lineal afín $L(h) = a + Bh$ para $h \in \mathbb{R}^m$. Suponga que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f\left(x_0 + h\right) - L(h)\|}{\|h\|} = 0 \tag{1}$$

Demostrar que, en tal caso, $a = f\left(x_0\right)$ y $B = Df\left(x_0\right)$ y que f es diferenciable en x_0. Es decir, una función lineal que cumple tal condición esta únicamente determinada, por lo tanto el candidato a diferencial tiene que ser Df en el punto en cuestión.

Ind: Use la continuidad de f en x_0 para demostrar que $a = f\left(x_0\right)$, luego tomar $h = te_j$ el j-ésimo vector canónico en (1), para demostrar que las derivadas parciales de las funciones coordenadas de f con respecto a x_j existen y son iguales a la columna j de B. Concluya.

P2

(a) Considere la función g definida por

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r,\theta) &\longmapsto g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Calcular donde corresponda $Dg(r,\theta)$.

(b) Lo mismo de la parte anterior para la función

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ (x,y) &\longmapsto h(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}(y/x)\right) \end{aligned}$$

(c) Considere la función

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ (u,v) &\longmapsto T(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right). \end{aligned}$$

Calcular, donde se pueda, $DT(u,v)$ y analizar la extensión de T de manera continua y diferenciable al origen.

$\boxed{\textbf{P3}}$ Considere $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$. Sea $g : S \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$g(1,0) = g(0,1) = 0 \text{ y } g(-x) = -g(x), \forall x \in S$$

Se define ahora la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(a) Dado $a \in \mathbb{R}^2$ demostrar que la función $t \mapsto h(t) = f(at), t \in \mathbb{R}$ es diferenciable

(b) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = |xy|^\alpha$.

(a) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$ como función del parámetro α.

(b) Calcular las derivadas parciales en $(0,0)$.

$\boxed{\textbf{P5}}$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0. \end{cases}$$

(a) Calcular, donde existan, las derivadas parciales de f en cada (x,y).
Ind: Considerar los casos $xy \neq 0, xy = 0 \wedge x \neq 0, xy = 0 \wedge y \neq 0, (x,y) = (0,0)$.

(b) Si $xy \neq 0$, ¿ Es f diferenciable en (x,y)?

(c) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

(d) ¿Es $\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en $(0,0)$?.

$\boxed{\textbf{P6}}$ Para $\alpha > 0$ un parámetro real, se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por la siguiente fórmula

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Justifique la continuidad de la función f para $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Determine la condición sobre α para que f sea continua en $(0,0)$.

(c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ para todo punto (x,y) **Ind:** Argumente porque se puede hacer los cálculos para $(x,y) \neq (0,0)$, y en $(0,0)$ proceda por definición.

(d) Determine el rango de valores de α en el cual la función f es diferenciable en $(0,0)$ y en tal contexto calcule $Df(0,0)$.

$\boxed{\textbf{P7}}$.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \frac{y \operatorname{sen}(x)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Mostrar que las derivadas parciales existen en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Encontrar el conjunto donde f es diferenciable.

$\boxed{\textbf{P8}}$ Sean $f_1, f_2, \ldots, f_n :]a, b[\to \mathbb{R}$ funciones derivables. Considere la función

$$\begin{aligned} f : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)). \end{aligned}$$

Donde $\Omega =]a, b[\times \cdots \times]a, b[\subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que f es diferenciable en Ω y

$$\langle Df(x)y, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_i)\, y_i^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

$\boxed{\textbf{P9}}$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x) - 1}{x(1 + \operatorname{sen}^2 xy)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Demostrar que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcular las derivadas parciales en todo $\mathbb{R}^2$ tal que $x \neq 0$.

(c) Calcular las derivadas parciales en todo $\mathbb{R}^2$ tal que $x = 0$.

(d) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0, 0)$.

$\boxed{\textbf{P10}}$ Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{17}{4} - x^2 - y^2 & \text{si} \quad x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si} \quad x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

(a) Determine el dominio y estudiar la continuidad de f.

(b) Determinar y dibujar las curvas de nivel k de f, para todo $k \in \mathbb{R}$.

(c) Calcular el gradiente de f.

(d) Estudie la diferenciabilidad de f.

$\boxed{\textbf{P11}}$ Considere la función f definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \|x\|^{\beta}. \end{aligned}$$

Estudiar los valores de $\beta \in \mathbb{R}$, para los cuales f es diferenciable en $\mathbb{R}^n$. En tal caso encontrar una expresión para $\nabla f(x)$. Haga el estudio para $\|\cdot\|_2$.

$\boxed{\textbf{P12}}$ Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tales que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y $Dg(x_0) \neq 0$.

(a) Suponga que $Df(x_0) = \lambda Dg(x_0)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + te)}{g(x_0 + te)} = \lambda$$

para todo vector $e \in \mathbb{R}^n$ tal que $Dg(x_0)\, e \neq 0$.

(b) Suponga que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe. Pruebe entonces que $Df\,(x_0) = \lambda Dg\,(x_0)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

P13 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{(x^2+y^2)^{3/2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(b) Pruebe que f es continua en $(0,0)$ si y solamente si $\alpha > \frac{3}{2}$. **Ind**: Use que $2ab \leq a^2 + b^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Calcule las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(d) Calcule, usando la definición, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(e) Encuentre todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que f es diferenciable en $(0,0)$. Ind: Podría serle útil considerar los casos $\frac{3}{2} < \alpha \leq \frac{9}{2}$ y $\alpha > \frac{9}{2}$ por separado.

P14 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x} & y \in \mathbb{R}, x \neq 0 \\ y & x \in \mathbb{R}, y = 0. \end{cases}$$

(a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine la derivadas parciales de f y estudie su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

(c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

P15 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine los valores de α para los cuales f es continua en $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine la derivadas parciales de f en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$ en función de los valores de α.

P16 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2} & x \in \mathbb{R}, y \neq 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}, y = 0 \end{cases}$$

(a) Muestre que f es continua en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) : x \neq 0\}$.

(b) Pruebe la existencia de derivadas direccionales en toda dirección para el punto $(0,0)$.

(c) Pruebe que f no es diferenciable en $(0,0)$. ¿Es esto contradictorio? Justifique.