Auxiliar 6: Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Diferenciabilidad y regla de Fermat]**

(a) Demuestre que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto si y solo si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que denotamos $Df(x)$ o $f'(x)$, que hace cumplir la igualdad:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

donde $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$$

(b) Muestre que si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto, entonces

$$Df(x)d = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Deduzca de esto último que si existe $Df(x)$, entonces es único.

(c) **[Fermat]** Suponga que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in U$ abierto y suponga además que x es mínimo (o máximo) local de f, demuestre que $Df(x) = 0$

(d) Demuestre que una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no puede ser diferenciable en 0

P2 **[Formas cuadráticas]**

(a) Considere la función f definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^T Ax + b^T x + c \end{aligned}$$

Donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indica el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $Df(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que viene dado por

$$Df(x) = x^T(A + A^T) + b^T$$

(b) Suponga ahora que $A \in \mathcal{S}^n$, escriba la expresión para $Df(x)$

(c) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ||x||_2^2$. Determine la matriz $Dg(x)$

P3 Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} xy^3 + x^2y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la derivada de g existe en $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ y viene dada por

$$Dg((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hint: Considere la desigualdad $|hk| + k^2 \leq 2(h^2 + k^2)$

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[Propuesto]** Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal, es decir, A se representa por una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pruebe que $DA(x) = A, \forall x \in A$

Resumen

Definición(Diferenciabilidad). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y U abierto. Decimos que f es diferenciable en x si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{||h||} = 0$$

Denotamos a dicha matriz por $Df(x)$ o $f'(x)$ y decimos que es la derivada de f en x y diremos que f es diferenciable si lo es en cada punto de U.

Proposición Se tiene que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto si y solo si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que denotamos $Df(x)$ o $f'(x)$, que hace cumplir la igualdad:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h)$$

donde $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$$

Definición(Diferencial) Si f es diferenciable sobre todo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el diferencial de f como la aplicación

$$Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$x \to Df(x)$$

Si el diferencial de f es continuo en su dominio, es decir, $Df \in C(U, \mathbb{R}^{m\times n})$, entonces decimos que $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Observación Decimos que $Df \in C(U, \mathbb{R}^{m\times n})$ si para toda secuencia $x_n \to x$ en U se tiene que $Df(x_n) \to Df(x)$ en $\mathbb{R}^{m\times n}$, es decir,

$$||x_n - x||_{\mathbb{R}^n} \to 0$$

implica que

$$||Df(x_n) - Df(x)||_{\mathbb{R}^{m\times n}} \to 0$$

donde la norma $||\cdot||_{\mathbb{R}^{m\times n}}$ se define para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como

$$||A||_{\mathbb{R}^{m\times n}} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2)^{1/2}$$

Proposición(Unicidad). Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto, entonces el diferencial es único.

Teorema Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Se tiene que si f es diferenciable en x, entonces f es continua en x.

Proposición(Álgebra de Derivadas). Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x \in U$ abierto tal que f y g son diferenciables en x. Se tiene que:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, D(f + \lambda g)(x) = Df(x) + \lambda Dg(x)$
- Si $m = 1, D(fg)(x) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$
- Si f y g son diferenciables en U, entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D(f + \lambda g) = Df + \lambda Dg$

Teorema(Regla de la Cadena). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$. Entonces se tiene que:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Definición(Derivada Direccional). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es derivable en x en la dirección v si existe el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

En tal caso denotamos dicho límite por $Df(x; v)$

Definición(Derivada Parcial). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $e_i \in (e_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ vector de la base canónica. Decimos que f es derivable en x con respecto a x_i si existe el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

En tal caso, lo denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

Teorema Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Luego, si f es diferenciable en x, entonces la derivada direccional de f en x está bien definida para toda dirección $v \in \mathbb{R}^n$ y se tiene que:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, Df(x)v = Df(x; v)$$

Pauta Aux 6

P1 [**Diferenciabilidad y regla de Fermat**]

(a) Demuestre que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto si y solo si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que denotamos $Df(x)$ o $f'(x)$, que hace cumplir la igualdad:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

donde $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$$

(b) Muestre que si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto, entonces

$$Df(x)d = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Deduzca de esto último que si existe $Df(x)$, entonces es único.

(c) [**Fermat**] Suponga que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto y suponga además que x es mínimo (o máximo) local de f, demuestre que $Df(x) = 0$

(d) Demuestre que una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no puede ser diferenciable en 0

(a) Supongamos que f es diferenciable en $x \in U$ y $h \in \mathbb{R}^n$, luego existe $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x)h \|}{\|h\|} = 0$$

Entonces, por la definición de $o(h) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como una función tal que $\lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0$ tenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x)h \|}{\|h\|} = 0$$

Equivale a

$$o(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)h$$

Reordenando términos podemos escribir

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

Concluyendo así la equivalencia

(6) Supongamos que $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto. Entonces existe $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x)h \|}{\|h\|} = 0$$

Si dicho límite existe $\forall h \to 0$, entonces en particular existe para un camino $h = td \longrightarrow 0$ donde $t \to 0$ y $d \in \mathbb{R}^n$ alguna dirección, sin pérdida de generalidad $\|d\| = 1$, i.e, $d \in S(0,1)$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x)h \|}{\|h\|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\| f(x+td) - f(x) - \cancel{t}Df(x)d \|}{\cancel{t}\underbrace{\|d\|}_{=1}} = 0 \quad \forall d \in S(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \left\| \frac{f(x+td) - f(x)}{t} - Df(x)d \right\| = 0 \quad \forall d \in S(0,1)$$

$$\Leftrightarrow Df(x)d = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \quad \forall d \in S(0,1)$$

Veamos ahora que se satisface $\forall d \in \mathbb{R}^n$. Puesto que $Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, es lineal, entonces para $d \in \mathbb{R}^n$ lo escribimos como $d = \lambda \hat{d}$ con $\lambda > 0$ y $\|\hat{d}\| = 1$, luego notemos que

$$Df(x)d = \lambda Df(x)\hat{d} = \lambda \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\hat{d}) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \lambda \frac{f(x+t\hat{d}) - f(x)}{t}$$

Haciendo $\hat{t} = t/\lambda \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

$$\lim_{t\to 0} \lambda \frac{f(x+t\hat{d}) - f(x)}{t} = \lim_{\hat{t}\to 0} \frac{f(x+\hat{t}\lambda\hat{d}) - f(x)}{\hat{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t}$$

Concluimos entonces

$$Df(x)d = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

De esto último desprendemos que de existir $Df(x)$, entonces debe ser único, pues el límite de existir es único.

(c) **[Fermat]** Suponga que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in U$ abierto y suponga además que x es mínimo (o máximo) local de f, demuestre que $Df(x) = 0$

Suponemos que f es diff en $x \in U$ mínimo (o máximo) local de f y suponemos además que es mínimo (máximo) local de f, i.e $\exists B(x, \delta)$ tal que

$$f(x) \leq f(x') \quad (\geq) \quad \forall x' \in B(x, \delta)$$

Equivalentemente,

$$f(x) \leq f(x+td) \quad (\geq) \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \ \forall d \in S(0,1)$$

Es decir, la función $\varphi_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para $d \in S(0,1)$

$$\varphi_d(t) = f(x+td)$$

tiene un mínimo (máximo) local en $t = 0$

Además, Ψ_d es diff en $t=0$ pues f es diff en x y la función $t \to x+td$ es diff en $t=0$ (es afín)

Luego, por resultados de cálculo diferencial, tenemos por la regla de Fermat en $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Psi_d(0) = \frac{d}{dt} f(x+td)\Big|_{t=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{\Psi_d(t) - \Psi_d(0)}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Df(x)d = 0 \quad \forall d \in \partial B(0,1)$$

Puesto que $Df(x)d$ es lineal, $\forall d \in \mathbb{R}^n$ $d = \lambda \hat{d}$ con $\hat{d} \in S(0,1)$

$$\Rightarrow \quad Df(x)d = \lambda \underbrace{Df(x)\hat{d}}_{0} = 0 \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \quad Df(x) = 0$$

(d) Demuestre que una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no puede ser diferenciable en 0

Sea $\|\cdot\|$ una norma, supongamos que $\|\cdot\|$ es diff en 0

Entonces en particular debe pasar que, para $t>0$

$$Df(x)d = \lim_{t\to 0} \frac{\|\cdot\|(td) - \|\cdot\|(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}\|d\|}{\cancel{t}} = \|d\|$$

Contradicción, pues $Df(x) = \|\cdot\|$ no es lineal !!

P2 [Formas cuadráticas]

(a) Considere la función f definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^T A x + b^T x + c \end{aligned}$$

Donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $Df(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que viene dado por

$$Df(x) = x^T(A + A^T) + b^T$$

(b) Suponga ahora que $A \in \mathcal{S}^n$, escriba la expresión para $Df(x)$

(c) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ||x||_2^2$. Determine la matriz $Dg(x)$

Veamos que

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^T A (x+h) + b^T(x+h) + c - (x^T A x + b^T x + c)$$

$$= \cancel{x^T A x} + h^T A x + x^T A h + h^T A h + \cancel{b^T x} + b^T h \cancel{+c} - \cancel{x^T A x} - \cancel{b^T x} \cancel{-c}$$

$x = x^T$ si $x \in \mathbb{R}$

$$= h^T A x + x^T A h + h^T A h + b^T h$$

$(\ )^T$

$$= x^T A^T h + x^T A h + h^T A h + b^T h$$

$$= x^T (A^T + A) h + b^T h + h^T A h$$

Proponemos como derivada $Df(x) = x^T(A^T + A) + b^T$, veamos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(x+h) - f(x) - Df(x) h \|}{\|h\|}$$

Cauchy Schwarz

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\| h^T A h \|}{\|h\|} \leq \lim_{h \to 0} \frac{\|Ah\| \cancel{\|h\|}}{\cancel{\|h\|}}$$

Hint

$$\leq \lim_{h \to 0} \|A\| \|h\| = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|}{\|h\|} = 0$$

De donde concluimos que

$$Df(x) = x^T(A^T + A) + b^T$$

(b) Suponga ahora que $A \in \mathcal{S}^n$, escriba la expresión para $Df(x)$

Si tenemos $A \in S^n$, entonces $A = A^T$, luego

$$Df(x) = x^T(A + A^T) + b^T = 2x^T A^T + b^T$$

$$\Rightarrow Df(x) = (2Ax + b)^T$$

(c) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ||x||_2^2$. Determine la matriz $Dg(x)$

Notemos que $g(x) = \|x\|^2 = x^T x = x^T I x + 0$

Por lo que es de la forma $x^T A x + b^T x + c$ con $A = I$, $b = 0$ y $c = 0$.

Entonces, por el resultado anterior,

$$Dg(x) = 2x^T$$

P3 Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} xy^3 + x^2y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la derivada de g existe en $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ y viene dada por

$$Dg((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hint: Considere la desigualdad $|hk| + k^2 \leq 2(h^2+k^2)$

Veamos si $Dg((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, para ello estudiamos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\| g((0,1)+(h,k)) - g(0,1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\|}{\|(h,k)\|} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tenemos

$$g(h,k+1) - g(0,1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h(k+1)^3 + h^2(k+1) - h \\ (k+1)^2 - 1 - 2k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(k^3+3k^2+3k+1) + h^2(k+1) - h \\ k^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} hk^3 + 3hk^2 + 3hk + \cancel{h} + h^2k + h^2 - \cancel{h} \\ k^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} hk(k^2+3k+3) + h^2(k+1) \\ k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1(h,k) \\ \theta_2(h,k) \end{bmatrix}$$

Debemos ver que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\begin{bmatrix} \theta_1(h,k) \\ \theta_2(h,k) \end{bmatrix}}{\|(h,k)\|} = 0$$

Vemos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\theta_2(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$$

Veamos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|\theta_1(h,k)|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk(k^2+\overbrace{3k+3}^{> (|k|+2)^2}) + h^2(k+1)|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|\,(k^2+4|k|+4) + h^2\overset{>1}{(|k|+1)}^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|\,(|k|+2)^2 + h^2(|k|+2)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(|hk|+h^2)(|k|+2)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Hint

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2(h^2+k^2)(|k|+2)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} 2\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\to 0}\underbrace{(|k|+2)}_{\to 2} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left\| g((0,1)+(h,k)) - g(0,1) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right\|}{\|(h,k)\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, $Dg((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, concluyendo