Auxiliar 6: Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[Diferenciabilidad y regla de Fermat]**

(a) Demuestre que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto si y solo si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que denotamos $Df(x)$ o $f'(x)$, que hace cumplir la igualdad:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

donde $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$$

(b) Muestre que si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto, entonces

$$Df(x)d = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \quad \forall d \in \mathbb{R}^n$$

Deduzca de esto último que si existe $Df(x)$, entonces es único.

(c) **[Fermat]** Suponga que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $x \in U$ abierto y suponga además que x es mínimo (o máximo) local de f, demuestre que $Df(x) = 0$

(d) Demuestre que una norma $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no puede ser diferenciable en 0

P2 **[Formas cuadráticas]**

(a) Considere la función f definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^T A x + b^T x + c \end{aligned}$$

Donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $Df(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y que viene dado por

$$Df(x) = x^T(A + A^T) + b^T$$

Hint: Recuerde que $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene $\|Ah\| \leq \|A\|\|h\|, \forall h \in \mathbb{R}^n$, donde $\|A\| = (\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}^2)^{1/2}$

(b) Suponga ahora que $A \in \mathcal{S}^n$, es decir, A es una matriz simétrica, escriba la expresión para $Df(x)$

(c) Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ||x||^2$. Determine la matriz $Dg(x)$

P3 Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = \begin{bmatrix} xy^3 + x^2y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

Demuestre que la derivada de g existe en $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ y viene dada por $Dg((0,1)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Hint: Considere la desigualdad $|hk| + k^2 \leq 2(h^2 + k^2)$

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[Propuesto]** Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal, es decir, A se representa por una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pruebe que $DA(x) = A, \forall x \in \mathbb{R}^n$, ¿Qué puede decir si A es lineal afín?

Resumen

Definición(Diferenciabilidad). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y U abierto. Decimos que f es diferenciable en x si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{||h||} = 0$$

Denotamos a dicha matriz por $Df(x)$ o $f'(x)$ y decimos que es la derivada de f en x y diremos que f es diferenciable si lo es en cada punto de U.

Proposición Se tiene que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto si y solo si existe $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, que denotamos $Df(x)$ o $f'(x)$, que hace cumplir la igualdad:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + o(h)$$

donde $o : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{||o(h)||}{||h||} = 0$$

Definición(Diferencial) Si f es diferenciable sobre todo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, definimos el diferencial de f como la aplicación

$$Df : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$x \to Df(x)$$

Si el diferencial de f es continuo en su dominio, es decir, $Df \in C(U, \mathbb{R}^{m\times n})$, entonces decimos que $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

Observación Decimos que $Df \in C(U, \mathbb{R}^{m\times n})$ si para toda secuencia $x_n \to x$ en U se tiene que $Df(x_n) \to Df(x)$ en $\mathbb{R}^{m\times n}$, es decir,

$$||x_n - x||_{\mathbb{R}^n} \to 0$$

implica que

$$||Df(x_n) - Df(x)||_{\mathbb{R}^{m\times n}} \to 0$$

donde la norma $||\cdot||_{\mathbb{R}^{m\times n}}$ se define para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ como

$$||A||_{\mathbb{R}^{m\times n}} = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2)^{1/2}$$

Proposición(Unicidad). Si $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $x \in U$ abierto, entonces el diferencial es único.

Teorema Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Se tiene que si f es diferenciable en x, entonces f es continua en x.

Proposición(Álgebra de Derivadas). Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x \in U$ abierto tal que f y g son diferenciables en x. Se tiene que:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, D(f + \lambda g)(x) = Df(x) + \lambda Dg(x)$
- Si $m = 1, D(fg)(x) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$
- Si f y g son diferenciables en U, entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D(f + \lambda g) = Df + \lambda Dg$

Teorema(Regla de la Cadena). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ donde U, V son abiertos y $x \in U$ con $f(U) \subseteq V$ y $f(x) \in V$. Supongamos f es diferenciable en x y g es diferenciable en $f(x)$. Entonces se tiene que:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x))Df(x)$$

Definición(Derivada Direccional). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $v \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es derivable en x en la dirección v si existe el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

En tal caso denotamos dicho límite por $Df(x; v)$

Definición(Derivada Parcial). Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función, $x \in U$ abierto y $e_i \in (e_j)_{j\in\{1,\cdots,n\}}$ vector de la base canónica. Decimos que f es derivable en x con respecto a x_i si existe el límite:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

En tal caso, lo denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

Teorema Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función y $x \in U$ abierto. Luego, si f es diferenciable en x, entonces la derivada direccional de f en x está bien definida para toda dirección $v \in \mathbb{R}^n$ y se tiene que:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, Df(x)v = Df(x; v)$$