Auxiliar 5: Preparación Control 1

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[C1 2019-2]** **(a)** Para dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en $\mathbb{R}^n$, se define la aplicación

$$N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto N(x) = \sqrt{\|x\|_a^2 + \|x\|_b^2}.$$

Demuestre que N es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Hint: Para demostrar la desigualdad triangular, estudie $N(x+y)^2$ y pruebe que $N(x+y)^2 \leq (N(x)+N(y))^2$. Para esto, puede serle útil la siguiente desigualdad de números reales:

$$pr + qs \leq \sqrt{\left(p^2+q^2\right)\left(r^2+s^2\right)}, \quad \forall p, q, r, s \in \mathbb{R}.$$

Puede utilizar esta desigualdad sin probarla.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \neq y$ y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existen números reales $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B\left(x, r_1\right) \cap B\left(y, r_2\right) = \emptyset,$$

donde las bolas se están considerando con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

(c) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que si A es un conjunto abierto y $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Observación: Recuerde que para $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{B}$ denota la adherencia de B.

P2 **[C1 2019-2]** **(a)** Sea $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\right\}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x \ln(x+y)$$

(a.1) Sea $A_1 = \{(x,y) \in \Omega : x = 0, y > 0\}$. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1$ con $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right)$.

(a.2) Sea $A_2 = \{(x,y) \in \Omega : y = x^\alpha, x > 0\}$ con $\alpha > 1$. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_2$ con $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right)$.

(a.3) Sea $A_3 = \left\{(x,y) \in \Omega : y = e^{-\frac{1}{x}} - x\right\}$. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_3$ con $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n, y_n\right)$.

(a.4) ¿Qué puede decir sobre el límite global $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Justifique su respuesta.

(b) Sea $OX = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ y considere la función $f : \mathbb{R}^2 \backslash OX \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}$$

(b.1) Estudie la continuidad de f en su dominio.

(b.2) Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe y calcule su valor.

(b.3) Muestre que para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f(x,y)$$

no existe.

$\boxed{\textbf{P3}}$ **[C1 2019-2]** (a) Considere el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \{(x,y) : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$$

Hint: A lo largo de este problema, recuerde que $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.
(a.1) Muestre que A es cerrado.
(a.2) Muestre que los conjuntos $\{(x,y) : 1 < |x| + |y|\}$ y $\{(x,y) : |x| + |y| < 2\}$ son abiertos. Concluya que

$$B = \{(x,y) : 1 < |x| + |y| < 2\}$$

es abierto.
(a.3) (1 pto.) Pruebe que

$$C = \{(x,y) : |x| + |y| = 1\} \cup \{(x,y) : |x| + |y| = 2\} \subseteq \mathrm{Fr}(A)$$

(a.4) (1 pts.) Concluya que $B = \mathrm{Int}(A)$.
Hint: Puede serle útil notar que

$$\mathrm{Int}(A) = \bar{A}\backslash(\bar{A}\backslash \mathrm{Int}(A)) = \bar{A}\backslash \mathrm{Fr}(A)$$

Nota: La parte **b)** de esta pregunta se realizó en el Auxiliar 3

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[C1 2017-1 - Correa]** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si $\alpha > 1$, demuestre que f es continua en todo su dominio.
Indicación: Le puede ser útil recordar que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2|xy|$.
(b) Si $\alpha \leq 1$, demuestre que f no es continua.

$\boxed{\textbf{P5}}$ **[C1 2017-1 - Correa]** Sea $(\vec{E}, ||\cdot||)$ un e.v.n., K un conjunto compacto en $\vec{E}$. Sea además $f : K \to K$ una función que verifica:

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad \forall x, y \in K$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que f tiene un único punto fijo en K.
(a) Sea $g : K \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x) = \|x - f(x)\|$$

Esta función alcanza su mínimo en K. ¿Por qué?

(b) Si denotamos $\bar{x}$ a este mínimo, demuestre que se debe tener que:

$$\|\bar{x} - f(\bar{x})\| \leq \|x - f(x)\| \quad \forall x \in K$$

Concluya a partir de esto, que $\bar{x} = f(\bar{x})$.
(c) Demuestre que f tiene un único punto fijo en K.

Parte Aux 5

P1 [C1 2019-2] **(a)** Para dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en $\mathbb{R}^n$, se define la aplicación

$$N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto N(x) = \sqrt{\|x\|_a^2 + \|x\|_b^2}.$$

Demuestre que N es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Hint: Para demostrar la desigualdad triangular, estudie $N(x+y)^2$ y pruebe que $N(x+y)^2 \leq (N(x)+N(y))^2$. Para esto, puede serle útil la siguiente desigualdad de números reales:

$$pr + qs \leq \sqrt{(p^2+q^2)(r^2+s^2)}, \quad \forall p,q,r,s \in \mathbb{R}.$$

Puede utilizar esta desigualdad sin probarla.

Veamos que N es norma

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$: Para $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow \|x\|_a^2 + \|x\|_b^2 = 0$$
$$\overset{\star}{\Leftrightarrow} \|x\|_a = 0 \wedge \|x\|_b = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donde usamos que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son normas para $\star$

- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$N(\lambda x) = \sqrt{\|\lambda x\|_a^2 + \|\lambda x\|_b^2}$$
$$= \sqrt{|\lambda|^2 (\|x\|_a + \|x\|_b)} = |\lambda| N(x)$$

Usando que $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ son normas

- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$: Seguimos la indicación

Tenemos

$$N(x+y)^2 = \|x+y\|_a^2 + \|x+y\|_b^2$$

Des. Triangular
$$\leq (\|x\|_a + \|x\|_a)^2 + (\|x\|_b + \|x\|_b)^2$$

Desarrollando

$$= \|x\|_e^2 + 2\|x\|_e\|y\|_e + \|y\|_e^2 + \|x\|^2 + 2\|x\|_b\|y\|_b + \|y\|_e^2$$

$$= N(x)^2 + N(y)^2 + 2\left(\underbrace{\|x\|_e\|y\|_e + \|x\|_b\|y\|_b}_{\leq \sqrt{(\underbrace{\|x\|_e^2+\|x\|_b^2}_{N(x)^2})(\underbrace{\|y\|_e^2+\|y\|_b^2}_{N(y)^2})}}\right)$$

Usando el Hint

$$\leq N(x)^2 + N(y)^2 + 2\sqrt{(\|x\|_e^2+\|x\|_b^2)(\|y\|_e^2+\|y\|_b^2)}$$

$$= N(x)^2 + N(y)^2 + 2N(x)N(y) = (N(x)+N(y))^2$$

Tomando raiz en la desigualdad

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

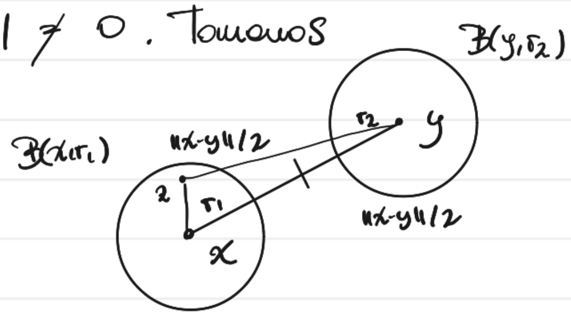
$\therefore$ N es una norma en $\mathbb{R}^n$

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \neq y$ y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existen números reales $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B(x, r_1) \cap B(y, r_2) = \emptyset,$$

donde las bolas se están considerando con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y \Rightarrow \|x-y\| \neq 0$. Tomamos $r_1 < \frac{\|x-y\|}{2}$ y $r_2 < \frac{\|x-y\|}{2}$



Luego si $z \in B(x,r_1)$, tenemos que

$$\|z-y\| \geq \big|\, \|y-x\| - \underbrace{\|x-z\|}_{< \frac{\|x-y\|}{2}} \big| > \frac{\|y-x\|}{2}$$

Des Triang inversa. $z-y$?

$\|(z-x)-(y-x)\|$

Por lo que $z \notin B(y,r_2)$, luego $B(x,r_1) \cap B(y,r_2) = \emptyset$

(c) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que si A es un conjunto abierto y $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.
Observación: Recuerde que para $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{B}$ denota la adherencia de B.

Sea $x \in A \cap \bar{B}$, como $x \in A \Rightarrow \exists B(x,\varepsilon) \subset A$, por otro lado
como $x \in \bar{B} \Rightarrow B(x,\varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.
Por lo que notando que $B(x,\varepsilon) \cap B \subset A \cap B$ concluimos
que $A \cap B \neq \emptyset$

$\boxed{\text{P2}}$[C1 2019-2] **(a)** Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x\ln(x+y)$$

(a.1) Sea $A_1 = \{(x,y) \in \Omega : x=0, y>0\}$. Sea $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1$ con $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$.

(a.2) Sea $A_2 = \{(x,y) \in \Omega : y = x^\alpha, x>0\}$ con $\alpha > 1$. Sea $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_2$ con $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$.

(a.3) Sea $A_3 = \left\{(x,y) \in \Omega : y = e^{-\frac{1}{x}} - x\right\}$. Sea $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_3$ con $(x_n,y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)$.

(a.4) ¿Qué puede decir sobre el límite global $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Justifique su respuesta.

(a.1) Como $x_n = 0$, $f(x_n,y_n) = \underbrace{x_n}_{0} \ln(\underbrace{x_n + y_n}_{>0}) = 0 \longrightarrow 0$
luego $\lim_n f(x_n,y_n) = 0$

(a.2) Tenemos $y_n = x_n^\alpha$ y $x_n > 0$ con $\alpha = 1$

$$f(x_n,y_n) = x_n \ln(x_n + x_n^\alpha) = x_n \ln(x_n(1+x_n^{\alpha-1}))$$

$$= x_n \ln(x_n) + x_n \ln(1+x_n^{\alpha-1})$$

Como $\alpha > 1$ y $\ln(1+x^{\alpha-1})$ es continua tenemos que

$$= \ln(1+x^{\alpha-1}) \longrightarrow \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow x_n \ln(1+x^{\alpha-1}) \longrightarrow 0$$

Por otro lado $x_n \ln(x_n) \to 0$ pues por L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{1/x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x_n = 0$$

Entonces $\lim_n f(x_n,y_n) = 0$

(a.3) Como $y_n = e^{-1/x_n} - x_n$

$$f(x_n, y_n) = x_n \ln(e^{-1/x_n}) = x_n \left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1$$

Por lo que $\lim_n f(x_n, y_n) = -1$

(a.4) Vemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe pues encontramos secuencias $(x_n, y_n) \to (0,0)$ distintas tales que

$\lim_n f(x_n, y_n)$ toma distintos valores

(b) Sea $OX = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ y considere la función $f : \mathbb{R}^2 \backslash OX \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{y}\right)\right) \sqrt{x^2 + y^2}$$

(b.1) Estudie la continuidad de f en su dominio.

(b.2) Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe y calcule su valor.

(b.1) Vemos que $(x,y) \to 1/y$ es continua en $\mathbb{R}^2 \backslash OX$ luego $f(x,y) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}$ es continua en su dominio por ser composición de funciones continuas

(b.2) Notemos que $\left(1 - \cos\left(\frac{1}{y}\right)\right)$ es acotado $\forall (x,y)$

Luego para $(x_n, y_n) \to (0,0)$

$$f(x_n, y_n) = \underbrace{\left(1 - \cos\left(\frac{1}{y_n}\right)\right)}_{\text{Acotado}} \underbrace{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

Por lo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

(b.3) Muestre que para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f(x,y)$$

no existe.

Tomemos $x_n = \bar{x}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n^1 = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n^2 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

Entonces $(x_n, y_n^1) \to (\bar{x}, 0)$, $(x_n, y_n^2) \to (\bar{x}, 0)$

$$f(x_n, y_n^1) = (\underbrace{1 - \cos(\cancel{2\pi n})}_{0}) \underbrace{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}_{\to |\bar{x}|} \to 0$$

$$f(x_n, y_n^2) = (1 - \cos(\cancel{\tfrac{\pi}{2}} + 2\pi n)) \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to |\bar{x}| \neq 0$$

Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f(x,y)$ no existe

$\boxed{\textbf{P3}}$ **[C1 2019-2]** (a) Considere el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \{(x, y) : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$$

Hint: A lo largo de este problema, recuerde que $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$.
(a.1) Muestre que A es cerrado.
(a.2) Muestre que los conjuntos $\{(x, y) : 1 < |x| + |y|\}$ y $\{(x, y) : |x| + |y| < 2\}$ son abiertos. Concluya que

$$B = \{(x, y) : 1 < |x| + |y| < 2\}$$

es abierto.
(a.3) (1 pto.) Pruebe que

$$C = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\} \cup \{(x, y) : |x| + |y| = 2\} \subseteq \mathrm{Fr}(A)$$

(a.4) (1 pts.) Concluya que $B = \mathrm{Int}(A)$.
Hint: Puede serle útil notar que

$$\mathrm{Int}(A) = \bar{A}\backslash(\bar{A}\backslash \mathrm{Int}(A)) = \bar{A}\backslash \mathrm{Fr}(A)$$

Nota: La parte **b)** de esta pregunta se realizó en el Auxiliar 3

(a.1) Tomando $(x_n, y_n) \subset A \to (x, y)$, como $|x| + |y|$ es continua,

$$1 \leq |x_n| + |y_n| \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite

$$1 \leq |x| + |y| \leq 2 \Rightarrow (x, y) \in A \Rightarrow A \text{ es cerrado}$$

(e.2) Notemos que $\{(x,y) : |x|+|y| > 1\} = (\underbrace{\overline{B}_1(0,1)}_{\text{cerrado}})^c$
con $B_1(0,1)$ la bola para la norma $\|\cdot\|_1$
Por lo que es abierto pues todas las normas son equivalentes

De igual forma, $\{(x,y) : |x|+|y| < 2\} = \underbrace{B_1(0,2)}_{\text{abierto}}$ es abierto

Finalmente notamos que $B = (\overline{B}_1(0,1))^c \cap (B_1(0,2))$ es abierto por ser intersección finita de abiertos.

(e.3) Sea $(x,y) \in C \Rightarrow |x|+|y| = 1 \ \vee \ |x|+|y| = 2$,

Supongamos $|x|+|y| = 1$, el otro caso es análogo,
Veamos que $B_1((x,y),\varepsilon) \cap A \neq \phi$, $B_1((x,y),\varepsilon) \cap A^c \neq \phi$

Se tiene pues tomando $x' = x - \varepsilon/2$, $y' = y$, vemos que $(x', y') \in B_1((x,y),\varepsilon))$

$$\underbrace{|x'|+|y| > 1}_{\text{si } > x} \quad \vee \quad \underbrace{|x'|+|y| < 1}_{\text{si } < x}$$

Luego sin perder generalidad, $|x'|+|y| < 1$ y

$$B_1((x,y),\varepsilon)) \cap A \neq \phi$$

Si tomamos $x' = x + \varepsilon/2$, tenemos $|x'|+|y| > 1$ y

$$B_1((x,y),\varepsilon) \cap A^c \neq \phi$$

Por lo que $(x,y) \in Fr(A) \Rightarrow C \subseteq Fr(A)$

(e.4) Como B abierto y $B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq int(A)$. Como $\overline{A} = A$ y luego

$$Int(A) = A \setminus Fr(A) \subseteq A \setminus C = B$$

Por lo que $B = int(A)$

P4 [**C1 2017-1 - Correa**] Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|^\alpha}{x^2-xy+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Si $\alpha>1$, demuestre que f es continua en todo su dominio.
Indicación: Le puede ser útil recordar que $\forall x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2\geq 2|xy|$.
(b) Si $\alpha\leq 1$, demuestre que f no es continua.

(a) Tenemos que f es continua fuera de $(0,0)$ por composición de continuas. Veamos la continuidad en 0

Sea $(x_n,y_n)\to 0$

$$|f(x_n,y_n)| \leq \frac{|x_ny_n|^\alpha}{|\underbrace{x_n^2-x_ny_n+y_n^2}|} \leq \frac{|x_ny_n|^\alpha}{|x_ny_n|}$$

des. Triang inversa
$$\begin{aligned}&\geq \big||x_n^2+y_n^2|-|x_ny_n|\big|\\ &\geq \big||2x_ny_n|-|x_ny_n|\big| = |x_ny_n|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(x_n,y_n)| \leq |x_ny_n|^{\alpha-1}$$

luego si $\alpha>1$

sandwich

$$|f(x_n,y_n)| \leq \underbrace{|x_ny_n|}_{\to 0}{}^{\alpha-1} \to 0$$

Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$, por lo que es continua en $(0,0)$ y en todo su dominio

(b) Si $\alpha\leq 1$, consideramos $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$, pero

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n^{2\alpha}}}{\frac{1}{n^2}} = n^{2(1-\alpha)} \to \begin{cases}1 & \text{si } \alpha=1\\ +\infty & \text{si } \alpha>1\end{cases}$$

Por lo que f no es cont. en $(0,0)$ $\Rightarrow$ f no es continua

$\boxed{\textbf{P5}}$ **[C1 2017-1 - Correa]** Sea $(\vec{E}, ||\cdot||)$ un e.v.n., K un conjunto compacto en $\vec{E}$. Sea además $f : K \to K$ una función que verifica:

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad \forall x, y \in K$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que f tiene un único punto fijo en K.

(a) Sea $g : K \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x) = \|x - f(x)\|$$

Esta función alcanza su mínimo en K. ¿Por qué?

(b) Si denotamos $\bar{x}$ a este mínimo, demuestre que se debe tener que:

$$\|\bar{x} - f(\bar{x})\| \leq \|x - f(x)\| \quad \forall x \in K$$

Concluya a partir de esto, que $\bar{x} = f(\bar{x})$.

(c) Demuestre que f tiene un único punto fijo en K.

(a) Tenemos que f es continua pues es Lipschitz, Notar que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, 0 < \delta < \varepsilon$

$$\|x-y\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| < \|x-y\| < \delta < \varepsilon$$

Notamos que $g = \|\cdot\| \circ (x - f)$, luego g es continua por comp. de continuas

Como K es compacto, g alcanza su mínimo en K

(b) Sea $\bar{x}$ mínimo de g, luego

$$g(\bar{x}) \leq g(x) \ \forall x \in K$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{x} - f(\bar{x})\| \leq \|x - f(x)\| \ \forall x \in K$$

Veamos que $\bar{x} = f(\bar{x})$, si no es así, usando que f es Lipschitz, aplicando la prop a $f(\bar{x}) \in K$

$$\| f(\bar{x}) - f(f(\bar{x}))\| < \|\bar{x} - f(\bar{x})\|$$

Es decir, $g(f(\bar{x})) < g(\bar{x})$ ⚡ pues $\bar{x}$ es el mínimo de g $\Rightarrow \underline{\bar{x} = f(\bar{x})}$

(e) Supongamos f posee dos puntos fijos $\bar{x}, \bar{y} \in K$

Usando que f es Lipschitz

$$\| \underbrace{f(\bar{x})}_{\bar{x}} - \underbrace{f(\bar{y})}_{\bar{y}} \| < \| \bar{x} - \bar{y} \|$$

$\bar{x}, \bar{y}$ ptos. fijos

$$\Longleftrightarrow \quad \| \bar{x} - \bar{y} \| < \| \bar{x} - \bar{y} \|$$

Por lo tanto f posee un único punto fijo.