Auxiliar 5: Preparación Control 1

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 **[C1 2019-2]** **(a)** Para dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en $\mathbb{R}^n$, se define la aplicación

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto N(x) = \sqrt{\|x\|_a^2 + \|x\|_b^2}. \end{aligned}$$

Demuestre que N es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Hint: Para demostrar la desigualdad triangular, estudie $N(x+y)^2$ y pruebe que $N(x+y)^2 \leq (N(x)+N(y))^2$. Para esto, puede serle útil la siguiente desigualdad de números reales:

$$pr + qs \leq \sqrt{(p^2+q^2)(r^2+s^2)}, \quad \forall p, q, r, s \in \mathbb{R}.$$

Puede utilizar esta desigualdad sin probarla.

(b) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \neq y$ y sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existen números reales $r_1, r_2 > 0$ tales que

$$B(x, r_1) \cap B(y, r_2) = \emptyset,$$

donde las bolas se están considerando con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

(c) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que si A es un conjunto abierto y $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.

Observación: Recuerde que para $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{B}$ denota la adherencia de B.

P2 **[C1 2019-2]** **(a)** Sea $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\right\}$ y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = x\ln(x+y)$$

(a.1) Sea $A_1 = \{(x,y) \in \Omega : x = 0, y > 0\}$. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_1$ con $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$.

(a.2) Sea $A_2 = \{(x,y) \in \Omega : y = x^\alpha, x > 0\}$ con $\alpha > 1$. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_2$ con $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$.

(a.3) Sea $A_3 = \left\{(x,y) \in \Omega : y = e^{-\frac{1}{x}} - x\right\}$. Sea $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_3$ con $(x_n, y_n) \to (0,0)$. Calcule el límite $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$.

(a.4) ¿Qué puede decir sobre el límite global $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Justifique su respuesta.

(b) Sea $OX = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ y considere la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus OX \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{y}\right)\right)\sqrt{x^2+y^2}$$

(b.1) Estudie la continuidad de f en su dominio.

(b.2) Demuestre que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe y calcule su valor.

(b.3) Muestre que para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},0)} f(x,y)$$

no existe.

$\boxed{\textbf{P3}}$ **[C1 2019-2]** (a) Considere el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \{(x,y) : 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$$

Hint: A lo largo de este problema, recuerde que $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$.
(a.1) Muestre que A es cerrado.
(a.2) Muestre que los conjuntos $\{(x,y) : 1 < |x| + |y|\}$ y $\{(x,y) : |x| + |y| < 2\}$ son abiertos. Concluya que

$$B = \{(x,y) : 1 < |x| + |y| < 2\}$$

es abierto.
(a.3) (1 pto.) Pruebe que

$$C = \{(x,y) : |x| + |y| = 1\} \cup \{(x,y) : |x| + |y| = 2\} \subseteq \operatorname{Fr}(A)$$

(a.4) (1 pts.) Concluya que $B = \operatorname{Int}(A)$.
Hint: Puede serle útil notar que

$$\operatorname{Int}(A) = \bar{A}\backslash(\bar{A}\backslash \operatorname{Int}(A)) = \bar{A}\backslash \operatorname{Fr}(A)$$

Nota: La parte **b)** de esta pregunta se realizó en el Auxiliar 3

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[C1 2017-1 - Correa]** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2 - xy + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Si $\alpha > 1$, demuestre que f es continua en todo su dominio.
Indicación: Le puede ser útil recordar que $\forall x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 2|xy|$.
(b) Si $\alpha \leq 1$, demuestre que f no es continua.

$\boxed{\textbf{P5}}$ **[C1 2017-1 - Correa]** Sea $(\vec{E}, ||\cdot||)$ un e.v.n., K un conjunto compacto en $\vec{E}$. Sea además $f : K \to K$ una función que verifica:

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad \forall x, y \in K$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que f tiene un único punto fijo en K.
(a) Sea $g : K \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x) = \|x - f(x)\|$$

Esta función alcanza su mínimo en K. ¿Por qué?

(b) Si denotamos $\bar{x}$ a este mínimo, demuestre que se debe tener que:

$$\|\bar{x} - f(\bar{x})\| \leq \|x - f(x)\| \quad \forall x \in K$$

Concluya a partir de esto, que $\bar{x} = f(\bar{x})$.

(c) Demuestre que f tiene un único punto fijo en K.