Auxiliar 4: Límites y continuidad

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, definimos $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \varphi(\frac{x}{||x||})$$

(a) Pruebe que f alcanza su máximo y su mínimo en su dominio.
(b) Pruebe que si f no es una función constante, entonces el límite

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

no existe.

P2 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Hint: Para $z \geq 0$, $e^z \geq 1 + z$

P3 Muestre que los siguientes límites no existen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \tag{1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3 - y^3}{2x^3 + 4y^3} \tag{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)}{x+y}. \tag{3}$$

Hint: Recuerde que el límite L existe si para toda secuencia $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ se tiene que $f(x_n, y_n) \to L$

P4 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, no acotada, es decir,

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+ : ||x|| \geq M \implies |f(x)| \geq L$$

Definimos para $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \lambda\}$. Pruebe que S_λ es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

P5 Analice la existencia de los siguientes límites.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^{3/2}}{x^2 + y^3} \tag{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \tag{5}$$

Hint: Para el primer límite considere el conjunto $A = \left\{\left(x, x^{2/3}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$

$\boxed{\textbf{P6}}$ Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f(0) > 0, \ f(x) < 0 : \text{ si } ||x|| > 1$$

Pruebe que f alcanza su máximo en $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\textbf{P7}}$ **[Propuesto]** Sea $K \subseteq B(0,1)$ un compacto en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existe $0 < r < 1$ tal que $K \subseteq \bar{B}(0,r)$ donde $\bar{B}(0,r)$ es la bola cerrada. **Hint:** Considere hacer uso de la continuidad de $|| \cdot ||$

Resumen

Teorema(Completitud de $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$

Teorema(Bolzano-Weierstrass) Toda secuencia $(x_n)_n$ definida sobre un compacto K posee una subsecuencia $(x_{n_k})_k$ convergente y cuyo límite está en K

Definición(Grafo) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, definimos su grafo como el conjunto

$$\text{Gr}(f) := \big\{(x, f(x)) : x \in D\big\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

Definición(Conjunto de nivel) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto de nivel α de f como el conjunto

$$N_\alpha(f) := \big\{x \in \Omega : f(x) = \alpha\big\}$$

Observación Si además f es continua, entonces $N_\alpha(f)$ es cerrado $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Definición(Límite de funciones) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x} \in \text{Adh}(\Omega)$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a $\bar{x}$, denotado como $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - \bar{x}|| < \delta \implies ||f(x) - L|| < \varepsilon$$

Proposición Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x} \in \text{Adh}(\Omega)$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ equivale a que

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega : x \to \bar{x}, f(x_n) \to L$$

Proposición(Álgebra de límites) Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces

1. $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) + \lim\limits_{x \to \bar{x}} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

En el caso en que $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene además

3. $\lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to \bar{x}} f(x) \lim\limits_{x \to \bar{x}} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to \bar{x}} f(x)}{\lim_{x \to \bar{x}} g(x)}$

Definición(Continuidad) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x} \in \text{Adh}(\Omega)$, decimos que f es continua en $\bar{x}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - \bar{x}|| < \delta \implies ||f(x) - f(\bar{x})|| < \varepsilon$$

Proposición Se tiene que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x}$ es equivalente a que

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega : x_n \to \bar{x}, f(x_n) \to f(\bar{x})$$

Teorema Se tiene que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x}$ si cada una de las funciones $(f_i)_{i=1}^m$ que define por coordenadas son continuas en $\bar{x}$

Teorema(Composición de funciones continuas) Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones continuas en $x \in \Omega$ y $f(x) \in f(\Omega) \subseteq D$, entonces $g \circ f$ es continua en $x \in \Omega$

Teorema(Caracterización global de la continuidad) Se tiene que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en Ω si y solo sí la preimagen de todo abierto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$f^{-1}(A) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^m \text{ abierto}$$

Observación También se tiene la equivalencia para f continua con que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para todo C cerrado en $\mathbb{R}^m$.

Observación El teorema anterior sigue siendo cierto para espacios topológicos.

Proposición(Álgebra de funciones continuas) Si f, g son funciones continuas, entonces $f + g$ es continua y λf es continua $\forall \lambda \in R$

Teorema Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}^m$ una función continua, entonces $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto.

Teorema(Weierstrass) Toda función continua f definida sobre un compacto K de $\mathbb{R}^n$ alcanza su mínimo y máximo en K

Pauta Auxiliar 4

P1 Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, definimos $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \varphi(\frac{x}{||x||})$$

(a) Pruebe que f alcanza su máximo y su mínimo en su dominio.
(b) Pruebe que si f no es una función constante, entonces el límite

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

no existe.

a) Notemos que $\forall \lambda > 0$ y $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$f(\lambda x) = \varphi\left(\frac{\lambda x}{\|\lambda x\|}\right) \overset{\lambda > 0}{=} \varphi\left(\frac{\cancel{\lambda} x}{\cancel{|\lambda|}\|x\|}\right) = \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x)$$

es decir, f es constante en la recta que pasa entre 0 y $x \in \mathbb{R}^n$

En efecto, considerando $\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \partial B(0,1)$, $x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|}$ que es continua por composición de continuas, vemos que $f = \varphi \circ \psi$ es continua por composición y además notemos que

$$f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = f(\partial B(0,1))$$

es decir, para conocer todos los valores que toma f basta evaluarla en la frontera.

Consideramos $f|_{\partial B(0,1)} : \partial B(0,1) \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$ que es continua pues f lo es.

Puesto que $\partial B(0,1)$ es compacto, entonces f alcanza su mínimo y su máximo en $\partial B(0,1)$ por Teorema de Weierstrass.

Concluimos que f alcanza su mínimo y máximo en su dominio.

6) Veamos que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe si f no es constante

Sabemos que f alcanza su mínimo y máximo en $x_{min} \in \mathbb{R}^n$ y $x_{max} \in \mathbb{R}^n$ respectivamente.

Si f no es constante entonces $f(x_{min}) \neq f(x_{max})$

Denotamos $f(x_{min}) = m$ y $f(x_{max}) = M$, y recordemos que $\forall \lambda > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $f(\lambda x) = f(x)$.

Entonces consideremos sucesiones de la forma

$$\lambda x_{min} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0 \quad y \quad \lambda x_{max} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

luego

$$f(\lambda x_{min}) = m \xrightarrow[\lambda \to 0]{} m$$
$$\neq$$
$$f(\lambda x_{max}) = M \xrightarrow[\lambda \to 0]{} M$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

no existe

P2 Calcule el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

Hint: Para $z \geq 0$, $e^z \geq 1 + z$

Siguiendo la indicación tenemos $\forall z > 0$

$$(e^z)^{-1} \leq (1+z)^{-1}$$

Notemos que $e^{-1/x^2+y^2} = e^{(1/x^2+y^2)^{-1}}$ y además tenemos

$$1/x^2+y^2 = z > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Por un lado, $e^{-1/x^2+y^2} > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

Luego, usando la indicación

$$e^{-1/x^2+y^2} \leq (1 + 1/x^2+y^2)^{-1} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$

Como $\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$ es continua en $(0,0)$ por álgebra de funciones continuas, haciendo $(x,y) \to 0$

$$\Rightarrow \quad 0 < e^{-1/x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-1/x^2+y^2} = 0$$

Concluimos usando teorema del Sandwich la convergencia del límite.

P3 Muestre que los siguientes límites no existen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \tag{1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-y^3}{2x^3+4y^3} \tag{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y)}{x+y}. \tag{3}$$

Hint: Recuerde que el límite L existe si para toda secuencia $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ se tiene que $f(x_n, y_n) \to L$

1. Veamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, buscamos dos secuencias $(x_n, y_n) \to (0,0)$ tales que los límites convergen a valores distintos

Consideremos $y_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $(x_n) \to 0$, entonces $(x_n, y_n) \to (0,0)$ y

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Consideramos ahora $(x_n) \to 0$ e $(y_n) \to 0$ iguales, i.e, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{w\to 0} \frac{w^2w^2}{w^2w^2+\cancel{(w-w)^2}} = 1$$

Encontramos dos caminos $(x,y) \to 0$ para los cuales el límite converge a valores distintos, luego no puede existir.

2. Veamos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-y^3}{2x^3+4y^3}$

Si consideramos $(x_n)_n \to 0$, $y_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-y^3}{2x^3+4y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$$

Si consideramos $(y_n)_n \to 0$, $x_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-y^3}{2x^3+4y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-y^3}{4y^3} = -\frac{1}{4}$$

De donde probamos que el límite no existe

3. Veamos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x+y}$

Si consideramos $(x_n)_n \to 0$, $y_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Si consideramos $(y_n)_n \to 0$, $x_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x - \sin y}{x+y} = \lim_{x\to 0} -\frac{\sin y}{y} = -1$$

De donde probamos que el límite no existe

P4 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, no acotada, es decir,

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+ : ||x|| \geq M \implies |f(x)| \geq L$$

Definimos para $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \lambda\}$. Pruebe que S_λ es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

Consideramos $S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos que es compacto, i.e, S_λ es cerrado y acotado

S_λ es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_\lambda \to x$, veamos que $x \in S_\lambda$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_\lambda$ tenemos que

$$f(x_n) \leq \lambda \ \forall n \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Puesto que f es continua,

$$x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

luego haciendo el límite en (1) deducimos

$$f(x) \leq \lambda$$

Por lo tanto, $x \in S_\lambda$ y entonces S_λ es cerrado

S_λ es acotado: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, supongamos que S_λ no es acotado

luego $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_\lambda$: $\|x_n\| \longrightarrow +\infty$ y por otro lado

$$|f(x_n)| \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero $\forall L \in \mathbb{R}_+, \exists M \in \mathbb{R}_+ : \|x\| \geq M \Rightarrow |f(x)| > L$

Tomando $L > \lambda$, elegimos $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_{\bar{n}}\| \geq M$
que existe pues $\|x_n\| \longrightarrow +\infty$

$$\Rightarrow |f(x_{\bar{n}})| > L > \lambda$$

De donde encontramos una contradicción pues

$$|f(x_n)| \leq \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

P5 Analice la existencia de los siguientes límites.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^{3/2}}{x^2+y^3} \tag{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \tag{5}$$

Hint: Para el primer límite considere el conjunto $A = \{(x, x^{2/3}) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$, para el segundo límite considere técnicas de acotamiento.

1. Veamos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x y^{3/2}}{x^2+y^3}$, siguiendo la indicación

Consideremos una secuencia $(x_n, y_n) \subset A \longrightarrow (0,0)$,
luego es de la forma $(x, x^{2/3})$ [Por ejemplo $(1/n, 1/n^{2/3})$]

Entonces en dicho caso, el límite de existir, es igual a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot (x^{2/3})^{3/2}}{x^2+(x^{2/3})^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, si consideramos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$, y $y_n = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ el límite es igual

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0^{3/2}}{x^2+0^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

Por lo tanto el límite no existe

2. Veamos $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, probaremos que tiende a cero.

Tenemos $0 \leq \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x^4}{x^2+y^2}}_{\leq \frac{x^4}{x^2}} + \underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^2}}_{\leq \frac{y^4}{y^2}}$

$$\leq x^2 + y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Por teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$$

P6 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f(0) > 0,\ f(x) < 0 : \text{ si } ||x|| > 1$$

Pruebe que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}^n$

Tenemos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y sabemos que

$$f(0) > 0 \quad y \quad f(x) < 0 : \text{Si } ||x|| > 1$$

Esto nos dice en particular no se alcanza en el conjunto $||x|| > 1$ pues $0 \in \overline{B}(0,1)$ sería un mejor candidato

Luego si existe un máximo este debe estar en $\overline{B}(0,1)$

Consideramos entonces $f|_{\overline{B}(0,1)} = \hat{f}$

$$\begin{aligned} \hat{f} : \overline{B}(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Luego, como $\overline{B}(0,1)$ es cerrado y acotado, es compacto, entonces por Teorema de Weierstrass f alcanza su máximo en $\overline{B}(0,1)$.

Por lo que probamos que x alcanza su máximo en $\mathbb{R}^n$