# Auxiliar 4: Límites y continuidad

**Profesor: Alexander Frank M.**
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

**P1** Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, definimos $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \varphi(\frac{x}{||x||})$$

(a) Pruebe que $f$ alcanza su máximo y su mínimo en su dominio.
(b) Pruebe que si $f$ no es una función constante, entonces el límite

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

no existe.

**P2** Calcule el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

**Hint:** Para $z \geq 0$, $e^z \geq 1 + z$

**P3** Muestre que los siguientes límites no existen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \tag{1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3 - y^3}{2x^3 + 4y^3} \tag{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)}{x+y}. \tag{3}$$

**Hint**: Recuerde que el límite $L$ existe si para toda secuencia $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ se tiene que $f(x_n, y_n) \to L$

**P4** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, no acotada, es decir,

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+ : ||x|| \geq M \implies |f(x)| \geq L$$

Definimos para $\lambda \in \mathbb{R}$ el conjunto $S_\lambda := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leq \lambda\}$. Pruebe que $S_\lambda$ es compacto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

**P5** Analice la existencia de los siguientes límites.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^{3/2}}{x^2 + y^3} \tag{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \tag{5}$$

**Hint**: Para el primer límite considere el conjunto $A = \left\{\left(x, x^{2/3}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$

$\boxed{\textbf{P6}}$ Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f(0) > 0, \;\; f(x) < 0 : \;\text{si } ||x|| > 1$$

Pruebe que $f$ alcanza su máximo en $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\textbf{P7}}$ **[Propuesto]** Sea $K \subseteq B(0,1)$ un compacto en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que existe $0 < r < 1$ tal que $K \subseteq \bar{B}(0,r)$ donde $\bar{B}(0,r)$ es la bola cerrada. **Hint:** Considere hacer uso de la continuidad de $||\cdot||$

**Resumen**

**Teorema(Completitud de $\mathbb{R}^n$)** En $\mathbb{R}^n$ toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$

**Teorema(Bolzano-Weierstrass)** Toda secuencia $(x_n)_n$ definida sobre un compacto $K$ posee una subsecuencia $(x_{n_k})_k$ convergente y cuyo límite está en $K$

**Definición(Grafo)** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, definimos su grafo como el conjunto

$$\operatorname{Gr}(f) := \{(x, f(x)) : x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

**Definición(Conjunto de nivel)** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función y $\alpha \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto de nivel $\alpha$ de $f$ como el conjunto

$$N_\alpha(f) := \{x \in \Omega : f(x) = \alpha\}$$

**Observación** Si además $f$ es continua, entonces $N_\alpha(f)$ es cerrado $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

**Definición(Límite de funciones)** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x} \in \operatorname{Adh}(\Omega)$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Decimos que $f(x)$ tiende a $L$ cuando $x$ tiende a $\bar{x}$, denotado como $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - \bar{x}|| < \delta \implies ||f(x) - L|| < \varepsilon$$

**Proposición** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x} \in \operatorname{Adh}(\Omega)$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = L$ equivale a que

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega : x \to \bar{x}, f(x_n) \to L$$

**Proposición(Álgebra de límites)** Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces

1. $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) + \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

En el caso en que $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se tiene además

3. $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) \lim\limits_{x\to\bar{x}} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to\bar{x}} f(x)}{\lim_{x\to\bar{x}} g(x)}$

**Definición(Continuidad)** Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función, $\bar{x} \in \operatorname{Adh}(\Omega)$, decimos que $f$ es continua en $\bar{x}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||x - \bar{x}|| < \delta \implies ||f(x) - f(\bar{x})|| < \varepsilon$$

**Proposición** Se tiene que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x}$ es equivalente a que

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega : x_n \to \bar{x}, f(x_n) \to f(\bar{x})$$

**Teorema** Se tiene que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\bar{x}$ si cada una de las funciones $(f_i)_{i=1}^m$ que define por coordenadas son continuas en $\bar{x}$

**Teorema(Composición de funciones continuas)** Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones continuas en $x \in \Omega$ y $f(x) \in f(\Omega) \subseteq D$, entonces $g \circ f$ es continua en $x \in \Omega$

**Teorema(Caracterización global de la continuidad)** Se tiene que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $\Omega$ si y solo sí la preimagen de todo abierto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$f^{-1}(A) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^n, \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^m \text{ abierto}$$

**Observación** También se tiene la equivalencia para $f$ continua con que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$ para todo $C$ cerrado en $\mathbb{R}^m$.

**Observación** El teorema anterior sigue siendo cierto para espacios topológicos.

**Proposición(Álgebra de funciones continuas)** Si $f, g$ son funciones continuas, entonces $f + g$ es continua y $\lambda f$ es continua $\forall \lambda \in R$

**Teorema** Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : K \to \mathbb{R}^m$ una función continua, entonces $f(K) \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto.

**Teorema(Weierstrass)** Toda función continua $f$ definida sobre un compacto $K$ de $\mathbb{R}^n$ alcanza su mínimo y máximo en $K$