Guía de estudio 2

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

1. Curvas de nivel y límites de funciones

P1 Encontrar los conjuntos de nivel para las siguientes funciones

- $f(x,y) = x + y$ para $f(x,y) = 1$
- $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$ para $f(x,y) = 0$

P2 Utilizando la definición $\varepsilon - \delta$ de límite, demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \left(x^2y^2 + 2xy^2 - 2x^2y + x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4xy + 1\right) = 0$$

P3 Estudiar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, en los casos

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4+y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P4 Determine los valores de α real, para los cuales $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe, donde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^4+y^4+x^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

P5 Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)^2y^2}{x^8} & \text{si} & 0 < x, 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

P6 Demostrar usando la definición $\varepsilon - \delta$ de límite que

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x^3+y^2}{(x+y)(x-y)} = 3.$$

$\boxed{\textbf{P7}}$ Considere la siguiente función

$$f(x,y) = \frac{x^p}{\sqrt{x^2-y}}.$$

(a) Para $p=1$, determine el dominio de f y sus curvas de nivel.
(b) Analice la existencia de $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ para todo $p \in \mathbb{R}$.

Hint: Para $p>1$ considere la sucesión $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{n^p-1}{n^p}\frac{1}{n}\right)$ $\forall n \geq 1$.

$\boxed{\textbf{P8}}$ Considere la función de dos variables definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{(x^4+y^6)(x-y)} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se pide estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
Hint: Considere los conjuntos $A_k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = kx, k \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}\right\}$

$\boxed{\textbf{P9}}$ Para r una constante real, considere $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{|xyz|^r}{x^2+y^2+z^2} & \text{si} \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Demostrar que si $r > \frac{2}{3}$ entonces $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = 0$.

$\boxed{\textbf{P10}}$ Demostrar que el siguiente límite existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

$\boxed{\textbf{P11}}$ Considere el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x, x > 0\right\}$. Determinar para que valores $\alpha \in \mathbb{R}$ la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)y}{x^a} & \text{si} \quad (x,y) \in A \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) \in A^c \end{cases}$$

se cumple que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

$\boxed{\textbf{P12}}$ Considere la función de dos variables definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1+x-\cos\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}(x)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
Ind: Le será útil calcular los límites reales $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos(z)}{z^2}$ y $\lim_{z\to 0} \frac{z-\operatorname{arctg}(z)}{z^3}$.

$\boxed{\textbf{P13}}$ Considere la función de dos variables definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y \leq 0 \quad \vee \quad y \geq x^2 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < y < x^2 \end{cases}$$

Se pide estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$\boxed{\textbf{P14}}$ Considere la función de dos variables definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^x - e^y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ e^x & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Se pide estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$\boxed{\textbf{P15}}$ Sea f la función definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}, \frac{(xy)^2}{(xy)^2+(x-y)^2} \right) \end{aligned}$$

(a) Determinar el dominio de f y de las funciones coordenadas. Graficar.

(b) Clasificar topológicamente los conjuntos determinados en la parte anterior. Más precisamente encontrar su interior, adherencia, frontera y el conjunto de puntos de acumulación de cada uno de ellos. Para tales efectos, trabajar geométricamente como medio de apoyo.

(c) Calcular, en el caso de existir para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la cantidad $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

$\boxed{\textbf{P16}}$ Considere la función de dos variables, estudie $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^+ + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{P17}}$ Estudie la existencia de los siguientes limites de funciones

$$\lim_{(x,w)\to(0,0)} \frac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{|x|+|y|}, \lim_{(x,w)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

2. Compacidad en $\mathbb{R}^n$ y Continuidad de funciones

$\boxed{\textbf{P18}}$ Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, si es verdadero ofrezca una demos. tración y en caso de ser falso entregue un contraejemplo

1. Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A \cap B$ es compacto.
2. Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A \cup B$ es compacto.
3. $f(x,y) = \exp\left(1/\left(x^4+y^4\right)\right)$ alcanza su mínimo en $1 \leq x^2+y^2 \leq 2$.
4. En $\mathbb{R}^2$ se tiene la identidad del paralelógramo con la norma $\|\cdot\|_1$.
5. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua, entonces $f^{-1}(K)$ con K compacto, es compacto.
6. Los conjuntos de nivel de un polinomio no constante son compactos.
7. Dado el conjunto $A := \left\{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\right\}$ se tiene que $\mathrm{Fr}(A) = A$.
8. Todo conjunto finito o numerable posee interior vacio.

$\boxed{\textbf{P19}}$ (a) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que A es cerrado y B e compacto. Pruebe que

$$A + B := \{x+y, x \in A, y \in B\}.$$

es cerrado. Pruebe además que si A es también compacto, entonces $A+B$ es compacto.

(b) Sean ahora $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Pruebe que

$$A \times B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in A, y \in B\right\},$$

es compacto.

P20 Dada una sucesión (x_k) en $\mathbb{R}^n$ convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, pruebe que el conjunto:

$$A = \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\},$$

es compacto.

P21 Sea (u_k) una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Para $n \geq 1$ definimos $A_k := \{u_l, l \geq k\}$. Demuestre que el conjunto de valores adherentes de (u_k) es:

$$V = \bigcap_{k \geq 1} \overline{A_k}.$$

Deduzca que si la sucesión es acotada, entonces V es compacto.

P22 Sea $(K_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos compactos decrecientes de $\mathbb{R}^n$, es decir: $K_{\ell+1} \subset K_\ell$ en cada ℓ. Definamos $K = \bigcap_{\ell \geq 0} K_\ell$.

(a) Pruebe que $K \neq 0$.

(b) Suponga que existe un abierto A tal que $K \subset A$.

Pruebe que existe ℓ tal que $K_\ell \subset A$.

P23 Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función.

(a) Pruebe que f es continua si y solo si para todo $O \subset \mathbb{R}^m$ abierto, se tiene que $f^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. ¿Es cierto el resultado si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con Ω abierto?

(b) Pruebe que f es continua si y solo si para todo $O \subset \mathbb{R}^m$ cerrado, se tiene que $f^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado. ¿Es cierto el resultado si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con Ω abierto, y con Ω cerrado? **Hint:** Puede ser útil demostrar que $f^{-1}(D^c) = f^{-1}(D)^c \quad \forall D \subseteq \mathbb{R}^m$.

(c) Verifique, entregando un contraejemplo, que en general no es cierto que una función continua f sea tal que $f(O)$ es abierto para O abierto y $f(C)$ sea cerrado para C cerrado.

(d) Si f es continua, considere $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cualquiera, demostrar que $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Obs: Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\bar{A}$ indica la adherencia del conjunto.

P24 Sean A, B subconjuntos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$. Definimos la distancia entre estos conjuntos, denotada $d(A, B)$, como

$$d(A, B) := \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Pruebe que si $A = \{a\}$ y B es cerrado, entonces existe $b \in B$ tal que $d(A, B) = \|a - b\|$.

(b) Pruebe que si A es compacto y B es cerrado, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(A, B) = \|a - b\|$.

(c) Encuentre un ejemplo donde, dados A y B cerrados, no existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $d(A, B) = \|a - b\|$.

P25 Para $i = 1, \ldots, n$, se define la i-ésima proyección de un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ como $\pi_i(x) = x_i$.

(a) Pruebe que la función $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua para todo $i = 1, \ldots, n$.

(b) Deduzca que toda función polinomial $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_a}$ es continua, donde $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$.

(c) Concluya que todo polinomio en n variables p define una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Dada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, identificamos A como un vector en $\mathbb{R}^{n^2}$ por medio de la asignación

$$x(A) = (A_1, A_2, \ldots, A_{n\bullet}) = (A_{11}, \ldots, A_{1n}, A_{21}, \ldots, A_{2n}, \ldots, A_{n1}, \ldots, A_{nn}) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Recordemos además que el determinante de una matriz de $n \times n$, denotado det $_n$, se puede definir por recurrencia como

$$\det_1(A) = A, A \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$$
$$\det_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot A_{i1} \cdot \det_{n-1}\left(A^{i1}\right), A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

donde A^{ij} es la matriz de $(n-1)\times(n-1)$ obtenida al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

(d) Pruebe, usando inducción, que para todo natural $\ell \geq 1$ la función $\det_\ell : M_{\ell\times\ell}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es un polinomio respecto a los elementos de la matriz $X = (X_{ij}) \in M_{\ell\times\ell}(\mathbb{R})$. **Ind**: Por ejemplo, si $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \det_2(X) = X_{11}X_{22} - X_{21}X_{22} = p\left(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}\right)$ con $p : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ el polinomio de cuatro variables $p\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = x_1x_4 - x_2x_3$.

(e) Deduzca que, bajo la identificación descrita en (1), $\det_N : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ es una función continua.

(f) Concluya que el conjunto $\mathrm{GL}(N, \mathbb{R}) := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ es invertible } \}$ es abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$.

Ind: Recuerde que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible si y sólo si $\det_n(A) \neq 0$.

$\boxed{\textbf{P26}}$ En esta pregunta probaremos un hecho muy interesante: La existencia de un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ asociado a una norma $\|\cdot\|$ cuando esta satisface un hecho geométrico: La identidad del paralelogramo. Veremos que si una norma satisface

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

entonces, existe un producto interno tal que $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$, dado por

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right),$$

para ello

(a) Pruebe que, con la definición recién dada, se tiene: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

(b) Pruebe que la función $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+n} \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}$ es continua.

(c) Pruebe que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ se tiene: $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(d) Pruebe que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$. Para ello argumente por inducción para $\lambda \in \mathbb{N}$, luego argumente como pasar a $\lambda \in \mathbb{Z}$, a $\lambda \in \mathbb{Q}$ y finalmente usando continuidad a $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluya que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es efectivamente un producto interno.