

Auxiliar 3: Sucesiones y compacidad

Profesor: Alexander Frank M.

Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1[C1 2019-2] Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Definimos

$$\text{diam}(K) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in K\}$$

Muestre que existen dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in K$ tales que

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \text{diam}(K)$$

Hint: Justifique que existen dos sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ en K tales que $\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{diam}(K)$, luego utilice la compacidad de K .

P2 Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n, y_n) := \left(\frac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2}, ne^{-n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

P3 Considere la sucesión $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n, y_n) := \left(\frac{u_n(\cos(v_n) - 1)}{u_n^2 + v_n^2}, \frac{2u_n^\alpha + v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|} \right)$$

donde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones reales tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1. Muestre que $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge cuando $\alpha = 2$ e indique su límite
2. ¿Qué pasa si $\alpha = 1$?

P4 Considere $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ una sucesión convergente a $x \in \mathbb{R}$, pruebe que el conjunto

$$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

es compacto.

P5[Propuesto] Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal

1. Demostrar que $\text{Ker}(L) = \{x \in \mathbb{R}^n : L(x) = 0\}$ es un conjunto cerrado.
2. Demostrar que L es inyectiva $\iff \exists m > 0$ tal que $\|L(x)\| > m\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

P6[Propuesto] Estudie la convergencia de las siguientes sucesiones:

$$a_n = (\sin(n\pi), \cos(n\pi), \frac{1 - \cos(n\pi)}{n^n}) \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (1)$$

$$b_n = \left(\frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1}{2n}, (2n + 1) \sin\left(\frac{1}{3n}\right) \right) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (2)$$

$$c_n = (\sqrt[n]{2024n}, \left(\frac{20n + 1}{20n}\right)^n) \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

P1 [C1 2019-2] Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Definimos

$$\text{diam}(K) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in K\}$$

Muestre que existen dos puntos $\bar{x}, \bar{y} \in K$ tales que

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \text{diam}(K)$$

Hint: Justifique que existen dos sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ en K tales que $\|x_n - y_n\| \rightarrow \text{diam}(K)$, luego utilice la compacidad de K .

Dem:

Como $\text{diam}(K) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in K\}$, por definición de supremo

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \bar{x}, \bar{y} \in K) : \|\bar{x} - \bar{y}\| + \varepsilon \geq \text{diam}(K)$$

luego podemos construir las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tomando $\varepsilon_n = 1/n \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) (\exists x_n, y_n \in K) : \|x_n - y_n\| \geq \text{diam}(K) - \frac{1}{n}$$

Notemos que

$$\text{diam}(K) - \frac{1}{n} \leq \|x_n - y_n\| \leq \text{diam}(K) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \|x_n - y_n\| \rightarrow \text{diam}(K) \quad (\text{Indicación})$$

Sin embargo no sabemos si x_n o y_n convergen, por lo que construiremos subsucesiones usando la compacidad de K .

Como K es compacto, existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset K$ subsucesión convergente a $\bar{x} \in K$ (cerrado y acotado $\rightarrow$ Bolzano)

Consideremos la subsucesión $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset K$, no sabemos si converge, pero como K es compacto existe una subsucesión $(y_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente a $\bar{y} \in K$.

Notemos entonces que $(x_{nk_j})_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsecuencia de $(x_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ que es convergente a $\bar{x} \in K$

Por lo tanto $(x_{nk_j})_{j \in \mathbb{N}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{x} \in K$, luego tenemos las sucesiones convergentes

$$(x_{nk_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset K \longrightarrow \bar{x} \in K$$

$$(y_{nk_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset K \longrightarrow \bar{y} \in K$$

Por lo tanto, usando los resultados anteriores (1)

$$(2) \quad \dim(K) - \frac{1}{n_{k_j}} \leq \|x_{nk_j} - y_{nk_j}\| \leq \dim(K) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Como trabajemos con subsecuencias, $n_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} +\infty$

Por otro lado, $\|\cdot\|$ es continua y $x_{nk_j} - y_{nk_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{x} - \bar{y}$

Por lo que $\|x_{nk_j} - y_{nk_j}\| \rightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\|$

Luego tomando límite $j \rightarrow \infty$ en (2)

$$\begin{array}{ccc} \dim(K) - \frac{1}{n_{k_j}} & \leq & \|x_{nk_j} - y_{nk_j}\| \leq \dim(K) \\ \xrightarrow[n_{k_j} \rightarrow \infty]{} 0 & & \xrightarrow{} \|\bar{x} - \bar{y}\| \\ \xrightarrow{} \dim(K) & & \end{array}$$

Por lo tanto encontramos $\bar{x}, \bar{y} \in K$ tales que

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \dim(K)$$

P2 Estudie la convergencia de la sucesión $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ dada por

$$\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) := \left(\frac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2}, ne^{-n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Recordemos que para sucesiones en $\mathbb{R}^n$, la convergencia está caracterizada por la convergencia por coordenadas.

Veamos x_n e y_n

$$x_n = \frac{2n^2 + (-1)^n}{3n^2} = \frac{2}{3} + \underbrace{\frac{1}{3n^2}}_{\rightarrow 0} \underbrace{(-1)^n}_{\text{Acotado}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3}$$

$$y_n = ne^{-n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{e^n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Recordemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, cuando $n \rightarrow \infty$, $1/n \rightarrow 0$

luego $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, de donde concluimos

$$y_n = \underbrace{\frac{1}{e^n}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Concluimos que $(x_n, y_n) \rightarrow \left(\frac{2}{3}, 0\right)$

P3 Considere la sucesión $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ definida por

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x_n, y_n) := \left(\frac{u_n(\cos(v_n) - 1)}{u_n^2 + v_n^2}, \frac{2u_n^\alpha + v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|} \right)$$

donde $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones reales tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \alpha \in \mathbb{R}$

1. Muestre que $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge cuando $\alpha = 2$ e indique su límite
2. ¿Qué pasa si $\alpha = 1$?

1. Veamos por coordenadas, veamos que $x_n \rightarrow 0$

Recordemos que $a^2 + b^2 \geq 2|a||b| \forall a, b \in \mathbb{R}$ (Pues $(a \pm b)^2 \geq 0$)
que implica $\frac{1}{a^2 + b^2} \leq \frac{1}{2|a||b|}$, y lo usamos para acotar x_n .

Entonces tenemos aplicándolo a $(u_n, v_n) \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{u_n(\cos(v_n) - 1)}{u_n^2 + v_n^2} \right| \leq \frac{|u_n| |\cos(v_n) - 1|}{2|u_n||v_n|} \\ &= \frac{|\cos(v_n) - 1|}{2|v_n|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pues $v_n \rightarrow 0$ y se tiene el límite conocido $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

Por Teorema del Sandwich concluimos que

$$\left| \frac{u_n(\cos(v_n) - 1)}{u_n^2 + v_n^2} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

lo cual implica

$$\frac{u_n(\cos(v_n) - 1)}{u_n^2 + v_n^2} \rightarrow 0$$

Veamos ahora la segunda Coordenada, consideramos $d=2$

$$y_n = \frac{2u_n^2 + v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|}$$

Probaremos que $y_n \rightarrow 0$, Tenemos por un lado

$$0 \leq \frac{2u_n^2 + v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|}$$

Queremos mejorar esta cantidad por algo que se vaya a cero, usando $u_n \rightarrow 0$ y $v_n \rightarrow 0$

Recordemos que

$$\forall \epsilon > 0, \frac{1}{2+\epsilon} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2+\epsilon} \leq \frac{1}{6} \quad \star$$

$$\text{luego } 0 \leq \frac{2u_n^2}{|u_n| + 3|v_n|} + \frac{v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|}$$

$$\begin{aligned} \star &\leq \frac{2u_n}{\cancel{|u_n|}} + \frac{v_n^4}{3\cancel{|v_n|}} \\ &= \underbrace{2|u_n|}_{\rightarrow 0} + \frac{|v_n|^3}{\underbrace{3}_{\rightarrow 0}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u_n) &\xrightarrow{n} 0 \\ (v_n) &\xrightarrow{n} 0 \end{aligned}$$

Entonces por Teorema del Sandwich

$$y_n = \frac{2u_n^2 + v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|} \rightarrow 0$$

Por lo tanto, Para $d \geq 2$ se tiene $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$

2. ¿Que pasa si $\alpha = 1$? $\rightarrow$ Baste considerar la segunda coordenada

Tenemos $y_n = \frac{2u_n + v_n^4}{|u_n| + 3|v_n|}$, buscaremos dos sucesiones

$(u_n, v_n) \rightarrow 0$ tales que den límites distintos en y_n .

Consideremos $v_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y u_n convergiendo a cero por la derecha y por la izquierda (ej: $u_n = 1/n$ y $u_n = -1/n$)

luego si $u_n \rightarrow 0$ por la derecha y $v_n = 0$

$$y_n = \frac{2u_n}{|u_n|} = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$$

Y si $u_n \rightarrow 0$ por la izquierda, $\frac{u_n}{|u_n|} = -1$ y

$$y_n = \frac{2u_n}{|u_n|} = -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2$$

luego encontramos para $\alpha = 1$ sucesiones distintas (u_n, v_n) tales que $u_n \rightarrow 0$, $v_n \rightarrow 0$ y que implican

$$(x_n, y_n) \rightarrow (0, 2) \quad \text{y} \quad (x_n, y_n) \rightarrow (0, -2)$$

Por lo que (x_n, y_n) no converge pues no converge por coordenadas.

P4 Considere $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ una sucesión convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, pruebe que el conjunto

$$K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

es compacto.

Dem: Veamos que K es cerrado y acotado

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente $\Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado

$\Rightarrow \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado $\Rightarrow K$ es acotado

Veamos que es cerrado. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ convergente a y .

PDR: $y \in K$. Tenemos dos cosas.

1. Existe una cantidad finita de x_n distintos entre sí en la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Por Principio del Pajar $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que x_m aparece infinitas veces, consideramos entonces

$$I = \{i \in \mathbb{N} : y_i = x_m\} \in \mathbb{N} \quad (|I| = |\mathbb{N}|)$$

los índices donde aparece x_m en la sucesión ordenados en orden creciente, luego $(y_i)_{i \in I}$ es una subsucesión de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Además $(y_i)_{i \in I} = x_m \quad \forall i \in I$ es constante, luego $y_i \xrightarrow{i} x_m$. Como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a y , $(y_i)_{i \in I}$ converge al mismo límite

$$\Rightarrow y = x_m \in K$$

luego K es cerrado

Veamos el otro caso

2. Existe una cantidad infinita de x_n distintos entre si en la secuencia $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Entonces podemos construir una subsecuencia $(y_k)_{k \in \mathbb{I}}$ eligiendo un elemento $y_k = x_m$ si y solo si $y_{k-1} = x_n$ con $n < m$.

Es decir, elegimos y_k en la secuencia solo si el indice m del x_m asociado sea mayor que del elemento y_{k-1} que hemos elegido antes.

Luego $(y_k)_{k \in \mathbb{I}}$ es una subsecuencia de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y Tambien es subsecuencia de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n} x$

Por lo tanto $y_k \xrightarrow{k} x \in K$ y entonces K es cerrado.

En ambos casos se concluye que K es compacto.

Resumen

Definición(Sucesión en $\mathbb{R}^n$) Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una secuencia de la forma

$$(s_k)_n = \begin{pmatrix} s_k^1 \\ \vdots \\ s_k^n \end{pmatrix}$$

donde $(s_k^1), \dots, (s_k^n)$ son sucesiones en $\mathbb{R}$.

Definición(Convergencia en $\mathbb{R}^n$) Decimos que la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0, \|x_k - x\| < \varepsilon$$

para $\|\cdot\|$ alguna norma en $\mathbb{R}^n$ y lo denotamos $x_k \rightarrow x$.

Observación Equivalentemente, para $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene

$$x_n \rightarrow x \iff \|x_n - x\| \rightarrow 0$$

Proposición(Álgebra de sucesiones) Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$ convergentes a x e y respectivamente, se tienen las siguientes propiedades

- $x_n + \lambda y_n \rightarrow x + \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $a_n x_n \rightarrow ax$ para $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $a_n \rightarrow a$
- $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$

Proposición Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Luego

$$x_n \rightarrow x \iff x_k^i \rightarrow x^i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Es decir, una sucesión converge si y solo converge por coordenadas.

Proposición Toda subsucesión de una sucesión convergente converge al mismo límite que la sucesión original

Definición(Sucesión acotada) Decimos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ es acotada si $\exists K > 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| \leq K$$

Teorema(Bolzano-Weierstrass) Toda secuencia $(x_n)_n$ definida sobre un compacto K posee una subsecuencia $(x_{n_k})_k$ convergente y cuyo límite está en K

Teorema Toda función continua f definida sobre un compacto K de $\mathbb{R}^n$ alcanza su mínimo y máximo en K .

Definición(Conjunto compacto) Decimos que A es compacto si es cerrado y acotado.

Definición(Sucesión de Cauchy) Considerando $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n, decimos que $(x_n)_n$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Proposición Toda sucesión convergente es de Cauchy

Proposición Toda sucesión de Cauchy es acotada

Teorema(Compleitud de $\mathbb{R}^n$) En $\mathbb{R}^n$ toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$