Guía de estudio 1

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

1. Normas en $\mathbb{R}^n$

En esta parte de la guía, salvo que se especifique una norma en particular, trabajaremos en $\mathbb{R}^n$ con una norma $\|\cdot\|$ cualquiera.

P1 Demostrar que la siguiente función define una norma en $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, x_2)^t &\longmapsto \|x\| = \left(\frac{x_1^2}{9} + 4x_2^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Hacer un dibujo del conjunto $B(\overrightarrow{0}, 1)$ respecto a esta norma.

P2

(a) Demostrar que para $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$.
(b) Demuestre que, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|,$$

y deduzca que

$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max(\|x + y\|, \|x - y\|).$$

Encuentre una norma $\|\cdot\|$ y vectores x e y no nulos donde se alcanza la igualdad (se dice en tal caso que la constante encontrada es la mejor).
(c) Supongamos ahora que trabajamos con la norma euclideana, es decir $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Pruebe que

$$(\|x\| + \|y\|)^2 \leq \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2,$$

y luego deduzca que

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max(\|x + y\|, \|x - y\|)$$

¿Es posible mejorar la constante $\sqrt{2}$?

$\boxed{\textbf{P3}}$ Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Consideremos en $\mathbb{R}^n$ la función $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(x) = N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|$$

Determine una condición necesaria y suficiente para que N sea una norma en $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\textbf{P4}}$ **[Jugando con las normas.]**

(a) Dados $a, b > 0$, consideremos la función $N(x_1, x_2) = \sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2}$. Pruebe que N es una norma en $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere ahora la función $M(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}$. Pruebe que M es también una norma en $\mathbb{R}^2$.

(c) Si N_1 y N_2 son normas en $\mathbb{R}^n$, entonces $N = \max(N_1, N_2)$ es también una norma en $\mathbb{R}^n$. ¿Es cierto que también $M = \min(N_1, N_2)$ lo sea?.

(d) Consideremos ahora un ejemplo más exótico. Sea $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función siguiente

$$D(x_1, x_2) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x_1 + tx_2|}{\sqrt{1 + t^2}}$$

Pruebe que D define una norma en $\mathbb{R}^2$. Más aun, pruebe que $D = \|\cdot\|_2$, para esto último será útil analizar la función de una variable $f(t) = \frac{(x_1+tx_2)^2}{1+t^2}$. Interprete este resultado geométricamente.

$\boxed{\textbf{P5}}$ **[$\|\cdot\|_p$ es una norma para $p > 1$]**

Sean $x, y, p, q \in \mathbb{R}^+$tales que $1/p + 1/q = 1$ (p, q se dicen Hölder conjugados) y sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ reales estrictamente positivos.

(a) Muestre, usando la concavidad de la función logaritmo, que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q}.$$

(b) Suponiendo que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1$$

muestre que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1$$

(c) Deduzca de lo anterior la desigualdad de Hölder

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}.$$

(d) Suponiendo ahora que $p > 1$, deduzca de lo anterior la desigualdad de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Ind: $(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)^{p-1} a_i + (a_i + b_i)^{p-1} b_i$.

(e) Concluya que la norma p, para $p > 1$ definida para $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

es efectivamente una norma en $\mathbb{R}^n$.

(f) Verifique mediante un contraejemplo simple que si $p < 1$, entonces $\|\cdot\|_p$ no define una norma.

$\boxed{\textbf{P6}}$ **[Producto interno y normas]** Recordamos que dado un espacio vectorial E, decimos que una función $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ es un producto interno real en E si satisface:

- $\forall x \in E : (x,x) \geq 0; (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (Positividad).
- $\forall x, y \in E : (x,y) = (y,x)$ (Simetría).
- $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda x + y, z) = \lambda(x,z) + (y,z)$. (Linealidad en la primera componente).

Naturalmente cuando $E = \mathbb{R}^n$ y $(x,y) = \langle x,y \rangle = x^t y$ (x^t es el vector traspuesto) tenemos el producto interno usual. El objetivo de esta pregunta es ver que hay otros productos internos en $\mathbb{R}^n$ y más aun, que podemos caracterizarlos a todos de una manera compacta.

Comencemos viendo que en $\mathbb{R}^n$ hay más productos internos que el usual:

(a.1) Verifique que en $\mathbb{R}^2$ el producto interno $(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$ es un producto interno.

(a.2) Verifique que en $\mathbb{R}^2$ el producto interno $(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ es un producto interno también.

En lo que sigue, probaremos el siguiente teorema:

Teorema: La aplicación $(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un producto interno en $\mathbb{R}^n$ si y solo si $(x,y) = x^t Ay$, donde $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y definida positiva.

Recuerdo: $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ es definida positiva si $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : x^T Ax > 0$ o, equivalentemente, los valores propios de A son todos positivos (Álgebra lineal).

Para probar el resultado, siga los siguientes pasos:

Para la implicancia hacia la derecha, es decir, suponiendo que (x,y) es un producto interno en $\mathbb{R}^n$, probaremos que existe una matriz $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ simétrica y definida positiva cumpliendo lo establecido por el resultado, para ello:

(b.1) Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, deduzca a partir de la (bi)-linealidad de $(\cdot,\cdot)$ que

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \, (e_i, e_j)$$

donde $e_i \in \mathbb{R}^n$ es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

(b.2) Definiendo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ vía $(A)_{ij} = a_{ij} = (e_i, e_j)$, deduzca que

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^t Ay$$

y que esta matriz es simétrica.

(b.3) La matriz anteriormente definida resulta ser simétrica y por tanto diagonalizable. Sean $\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$ a sus n valores propios (eventualmente repetidos) y $\{v_i, i = 1, \ldots, n\}$ a los n vectores propios asociados (estos no se repiten y no son nulos, ¿por qué?). Calcule (v_i, v_i) y deduzca que $\lambda_i > 0$ para todo i. Con esto se concluye la primera implicancia.

Para la implicancia hacia la izquierda, supongamos que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : (x,y) := x^t Ay$ con $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y definida positiva. Veamos que esto define un producto interno en $\mathbb{R}^n$. Para ello:

(c.1) Pruebe que (x,y) definido de esta forma es lineal en la primera variable y es simétrico.

(c.2) Para probar que este producto es definido positivo recuerde que A puede escribirse como $A = PDP^t$ con P matriz invertible que satisface $P^{-1} = P^t$ (P se dice ortogonal) y D es una matriz diagonal que contiene los valores propios de A, positivos por hipótesis. Calcule $(x,x) = x^t Ax$ utilizando el cambio de variable $y = P^t x$ para concluir que $(x,x) = 0$ si y solo si $x = 0$.

Comentario: Cuando $A = I_n$ (identidad $n \times n$), recuperamos el producto interno clásico. Sin embargo tenemos una infinidad de posibilidades. ¿Qué matrices A corresponden a las partes (a.1) y (a.2)?

Finalmente, note que si para A como en las condiciones del enunciado definimos

$$\|x\|_A := \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x^t A x}$$

esto define una norma en $\mathbb{R}^n$ que satisface todas las propiedades que hemos visto, en particular la desigualdad de Cauchy-Schwarz (y por tanto podemos definir el ángulo entre vectores para esta nueva norma, y nociones de ortogonalidad, identidad del paralelógramo, etc.).

P7 Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^N$. Para $A \in M_{N,N}(\mathbb{R})$ se define

$$\|A\|_\infty := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

(a) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^N$ se tiene la desigualdad $\|Ax\| \leq \|A\|_\infty \|x\|$.

(b) Demuestre que si B es cualquier otra matriz, entonces $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. Concluya que si A es invertible entonces $\left\|A^{-1}\right\|_\infty \geq \|A\|_\infty^{-1}$.

(c) Suponga que A es invertible y que $A^2 = I$. Pruebe que $x \mapsto |\!|\!|x|\!|\!| = \|Ax\|$ define otra norma en $\mathbb{R}^N$, tal que

$$\|A\|_\infty^{-1} \|x\| \leq |\!|\!|x|\!|\!| \leq \|A\|_\infty \|x\|.$$

P8 Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones, si es verdadero ofrezca una demostración y en caso de ser falso entregue un contraejemplo.

(a) Considerando a $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma $\|\cdot\|$ cualquiera, se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $r > 0$ y para todo $\lambda > 0 : \lambda B_{\|\cdot\|}(x,r) = B_{\|\cdot\|}(x, \lambda r)$.

Ind: Recuerde que, si $A \subset \mathbb{R}^n$, se define $\lambda A := \{\lambda \cdot a, a \in A\}$.

(b) La función $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $N(x_1, x_2) = |3x_1 + 2x_2|$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.

(c) Considerando a $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma $\|\cdot\|$ cualquiera, se tiene que: Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ son tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda y$.

(d) Dado $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ arbitrarios, existen $a, b > 0$ tales que

$$aB_1(x,r) \subset B_2(x,r) \subset bB_1(x,r)$$

Obs: Se entiende que B_i es la bola asociada a una norma $\|\cdot\|_i$.

P9 Demostrar las siguientes afirmaciones

(a) Dados $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se tiene: $x + B(y,r) = B(x+y, r)$.

(b) Dados $x, x' \in \mathbb{R}^n$ y $r, r' > 0$, se tiene que: $B(x,r) = B(x', r') \Leftrightarrow [x = x' \wedge r = r']$.

P10 Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $s > r > 0$.

(a) Suponga que $\bar{B}(x,r) \subset \bar{B}(y,s)$. Pruebe que $\|x-y\| \leq s - r$.

(b) Suponga que $\bar{B}(x,r) \cap \bar{B}(y,s) = \emptyset$. Pruebe que $\|x-y\| > r + s$.

P11 Para $x_1 \in \mathbb{R}^n$ y $r_1 > 0$ considere el conjunto $B_1 := B(x_1, r_1)$, sea $x_2 \in B_1$ y definamos $B_2 := B(x_2, r_2)$.

(a) Demostrar que $B_2 \subseteq B(x_1, r_1 + r_2)$.

(b) Si $r_1 < r_2$ demostrar que $B(x_2, r_2 - r_1) \subseteq B_1$.

2. Topología y asociados.

$\boxed{\textbf{P12}}$ Hacer un estudio topológico de los conjuntos dados a continuación, es decir determinar interior, cerradura (adherencia o clausura), frontera y puntos de acumulación en cada caso.

1. $\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.
4. $]-1,1]$.
5. $[1,+\infty[$.
6. $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

$\boxed{\textbf{P13}}$ Determinar la clausura (adherencia), interior y frontera de los siguientes conjuntos

1. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\right\}$.
2. $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1, x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$.
3. $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\right\}$.
4. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$.

$\boxed{\textbf{P14}}$ Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Demostrar que $\operatorname{Fr}(\bar{A}) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$ y $\operatorname{Fr}(\operatorname{int}(A)) \subseteq \operatorname{Fr}(A)$, pudiendo ser los tres conjuntos distintos.

$\boxed{\textbf{P15}}$ Dados A, B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que

1. $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$. Dar un ejemplo que muestre la falsedad de la otra inclusión.
2. $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B) \wedge \operatorname{adh}(A) \subseteq \operatorname{adh}(B)$.
3. $\operatorname{int}(A) \cap B \neq \varnothing \Longleftrightarrow \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{adh}(B) \neq \varnothing$.
4. $(\operatorname{adh}(A) = \mathbb{R}^n \wedge \operatorname{int}(B) \cap A = \varnothing) \Longrightarrow \operatorname{int}(B) = \varnothing$.
5. $\operatorname{int}(A^c) = (\operatorname{adh}(A))^c$.
6. $\operatorname{adh}(A^c) = (\operatorname{int}(A))^c$.

$\boxed{\textbf{P16}}$ Pruebe las siguientes propiedades para $A, B \subset \mathbb{R}^n$ cualquiera

a) Si $A \subset B$ entonces: $\operatorname{int}(A) \subset \operatorname{int}(B)$ y $\operatorname{adh}(A) \subset \operatorname{adh}(B)$.

b) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B), \operatorname{adh}(A \cup B) = \operatorname{adh}(A) \cup \operatorname{adh}(B)$. Determine la inclusión correspondiente para el caso de la unión de interiores e intersección de adherencias y de un ejemplo donde no exista igualdad.

c) Decimos que un conjunto A es denso en $\mathbb{R}^n$ si $\operatorname{adh}(A) = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si A es abierto entonces $B := A \cup \operatorname{int}(A^c)$ es denso en $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\textbf{P17}}$ Estudiar topológicamente los siguientes conjuntos. Se recomienda apoyar sus demostraciones con gráficos.

1. $A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1\}$.
2. $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n :< x, a >= 1\}$, donde $a \in \mathbb{R}^n$ es un vector fijo.
3. $A_3 = \overline{B\left(\left(\frac{3}{4}, 0\right), \frac{1}{4}\right)} \cup \bigcup_{k\geq 2} B\left(\left(\frac{3}{2^{k+1}}, 0\right), \frac{1}{2^{k+1}}\right)$.
4. $A_4 = \left\{\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right) \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{N}\right\}$.
5. $A_5 = \{(t, \operatorname{sen}(\pi/t)) : t \in]0, 1]\}$.
6. $A_6 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{Q}\}$.

$\boxed{\textbf{P18}}$ Considere el conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, y > \operatorname{tg}(x)\right\}$.

(a) Determine $\operatorname{int}(A), \operatorname{adh}(A), \operatorname{Fr}(A)$ y exprese estos conjuntos analíticamente.

(b) ¿ Es A abierto, cerrado?.

$\boxed{\textbf{P19}}$ Sean A y B los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 4, x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 8\}$$

(a) Probar que A es un conjunto abierto y encuentre su frontera.
(b) Determine el interior, adherencia, frontera de B.

$\boxed{\textbf{P20}}$ Decida si los siguientes conjuntos son abiertos, cerrados, o ninguno. Además, para cada caso, exhiba sin demostración interior, adherencia y frontera.

(a) $A = [0, 1] \cup \{2\}$,
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$,
(c) $C = \left\{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : n, m \in \mathbb{N}\right\}$,
(d) $D = \{x \in \mathbb{R}^N : 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$,
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists m \in \mathbb{N}, y = mx\}$.

$\boxed{\textbf{P21}}$ Para cada uno de los siguientes conjuntos, determine (expresando analíticamente) y grafique interior, adherencia y frontera; decida si son abiertos o cerrados

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 2, x > -1, y \geq 0\} \cup \{(2, -1)\}$.
(b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x - 4, x \in \mathbb{N}, 4 \leq x \leq 8\}$.

$\boxed{\textbf{P22}}$ Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos no vacíos.

1. Pruebe que $\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B)$. Encuentre conjuntos A, B tales que la desigualdad sea estricta.
2. Suponga que A es cerrado, pruebe que $\operatorname{Fr}(A) \subset A$.
3. Sean A, B cerrados tales que $A \cap B = \emptyset$, pruebe que

$$\operatorname{Fr}(A \cup B) = \operatorname{Fr}(A) \cup \operatorname{Fr}(B).$$

$\boxed{\textbf{P23}}$ Decida si cada una de las siguientes sucesiones son convergentes, y en caso de serlo, indique su límite. Justifique todas sus respuestas.

1. $\vec{x}_n = \left(e^{-n}\cos\left(n^2\right), e^{-n}\sin\left(n^2\right)\right)$,
2. $\vec{x}_n = (2^{-n}, 1+n)$,
3. $\vec{x}_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}, \frac{n^2+3^n}{n!}\right)$,
4. $\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, (-1)^n, \frac{n+1}{n}, (-1)^{n+1}\right)$.

$\boxed{\textbf{P24}}$ Demuestre que, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío

1. x es punto interior de A si y solo si para cada sucesión $(x_k)_k$ que converge a x existe k_0 tal que $\forall k \geq k_0 : x_k \in A$.
2. x es punto adherente de A si y solo si existe una sucesión $(x_k)_k$ convergente a x tal que $x_k \in A, \forall k$
3. x es punto de acumulación de A si y solo si existe una sucesión $(x_k)_k$ convergente a x tal que $x_k \in A \wedge x_k \neq x, \forall k$.

$\boxed{\textbf{P25}}$ Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cerrados y disjuntos. Demostrar que existen abiertos no vacíos U y V tales que $A \subseteq U, B \subseteq V$ que satisfacen $U \cap V = \varnothing$. Recuerde que dos conjuntos C y D se dicen disjuntos si y sólo si $C \cap D = \varnothing$.

Ind: Puede ser útil considerar

$$d(A,B) := \inf_{x\in A, y\in B} \|y - x\|$$

y estudie sus propiedades en el caso particular de esta pregunta.