# Auxiliar 2: Topología II

**Profesor: Alexander Frank M.**
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

**P1** **Caracterización para la adherencia y la frontera**
Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, se define la distancia a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ al conjunto $A$ para $||\cdot||$ una norma fija en $\mathbb{R}^n$ como

$$d_A(x) := \inf_{y \in A} ||y - x||$$

Pruebe las siguientes caracterizaciones en términos de esta función

1. $\text{Adh(A)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) = 0\}$
2. $\text{Fr(A)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d_A(x) = 0 \wedge d_{A^C} = 0\}$

**Indicación:** Le será útil recordar que si $I \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado por debajo, entonces para $a = \inf(I)$ se tiene que $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in I)$ tal que $a + \varepsilon \geq x$, de hecho, esta afirmación caracteriza al ínfimo.

**P2** Demuestre las siguientes propiedades para $A, B \subset \mathbb{R}^n$

1. $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$
2. $\text{Adh}(A \cap B) \subseteq \text{Adh}(A) \cap \text{Adh}(B)$
3. $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
4. $\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$
5. $\text{int}(A) = \varnothing$ si $A$ es numerable

**P3** **Seno del topólogo**
Considere $A \subseteq \mathbb{R}^2$ definido por

$$A = \left\{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)) : x > 0\right\}$$

1. Bosqueje el conjunto $A$
2. Demuestre que $\text{int}(A) = \varnothing$ y encuentre $\text{Adh}(A)$

**P4** **[Propuesto]** Considere $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, se define el conjunto

$$A + B = \left\{a + b : a \in A, b \in B\right\}$$

Demostrar que si $A$ es abierto entonces $A + B$ es abierto

**P5** **[Propuesto]** Sea $||\cdot||$ una norma en $\mathbb{R}^n$ y $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz invertible, pruebe que

$$||\cdot||_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \to ||x||_P := ||Px||$$

define una norma en $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\textbf{P6}}$ **[Propuesto]** Considere $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ normas equivalentes sobre $E$ un espacio vectorial

1. Muestre que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ y $x \in E$ se tiene que

$$||x_n - x||_1 \to 0 \iff ||x_n - x||_2 \to 0$$

2. Muestre que $\forall A \subset E$,

$$A \text{ es abierto en } (E, ||\cdot||_1) \iff A \text{ es abierto en } (E, ||\cdot||_2)$$

**Aclaración:** Diremos que dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ son equivalentes si existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C_2||x||_1 \forall x \in E$

**Resumen**

**Definición(Conjunto acotado)** Decimos que $A \subset E$ es acotado si $\exists r > 0$ tal que $A \subset B(0,r)$
**Definición(Conjunto abierto)** Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y $A \subset E$, decimos que $A$ es abierto si

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset A$$

**Definición(Conjunto cerrado)** Decimos que $A$ es cerrado si $A^c$ es abierto
**Definición(Punto de Adherencia)** Decimos que $x$ es un punto de adherencia de $A$ si existe una secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $(x_n)_n \to x$.
**Observación** Equivalentemente, $x$ es de adherencia si para todo abierto $\mathcal{V}_x$ que contenga a $x$ es tal que $\mathcal{V}_x \cap A \neq \varnothing$
**Definición(Adherencia)** Definimos $\mathrm{Adh}(A)$ la adherencia de $A$ como el conjunto formado por todos los puntos adherentes de $A$.
**Observación** Se tiene que $A \subset \mathrm{Adh}(A)$ pues si $x \in A$, entonces basta construir la secuencia constante $x_n = x \ \forall n \in \mathbb{N}$, como $x \in A$, $(x_n)_n \subset A$ por definición y claramente $(x_n)_n \to x$, luego $x \in \mathrm{Adh}(A)$
**Definición(Frontera)** Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, definimos $\mathrm{Fr}(A)$ su frontera como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que para cualquier $r > 0$, se tiene

$$B(x,r) \cap A \neq \varnothing \quad y \quad B(x,r) \cap A^C \neq \varnothing$$

**Observación** Equivalentemente, $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Adh}(A) \setminus$ int(A)
**Teorema** Si $A$ es cerrado, entonces $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, más aún, si Fr(A) $\subset A$, entonces $A$ es cerrado
**Proposición** Se tiene que $A$ es cerrado si es igual a su adherencia
**Definición(Conjunto compacto)** Decimos que $A$ es compacto si es cerrado y acotado.
**Definición(Sucesión de Cauchy)** Considerando $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n, decimos que $(x_n)_n$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 > 0$ tal que si $n, m \geq n_0$, entonces

$$||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

**Definición(Espacio de Banach)** Decimos que $(E, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ converge a un punto $x \in E$, en dicho caso decimos que $||\cdot||$ hace que $E$ sea completo.
**Proposición** Toda sucesión convergente es de Cauchy
**Proposición** Toda sucesión de Cauchy es acotada
**Teorema(Completitud de $\mathbb{R}^n$)** En $\mathbb{R}^n$ toda sucesión de Cauchy $(x_n)_n$ converge a un punto $x \in \mathbb{R}^n$
**Observación** Se puede probar que $(C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach y que $(C([0,1]), ||\cdot||_1)$ no lo es, es decir, existen sucesiones de Cauchy $(f_n)_n \subset C([0,1])$ usando la norma $||\cdot||_1$ que no poseen un límite $f \in C([0,1])$
**Teorema(Bolzano-Weierstrass)** Toda secuencia $(x_n)_n$ definida sobre un compacto $K$ posee una subsecuencia $(x_{n_k})_k$ convergente y cuyo límite está en $K$
**Teorema** Toda función continua $f$ definida sobre un compacto $K$ de $\mathbb{R}^n$ alcanza su mínimo y máximo en $K$