Auxiliar 1: Topología y normas

Profesor: Alexander Frank M
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 Considere $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado

1. Demuestre que si $(A_i)_{i\in I}$ son abiertos, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto, pruebe además que si $(C_i)_{i\in I}$ son cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.
2. **[Propuesto]** Considere $E = \mathbb{R}^n$, exhiba un caso en donde $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sean abiertos pero $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no lo sea, de igual forma encuentre $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cerrados tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ no sea cerrado
3. Demuestre que si A es abierto, entonces $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(A)) = \varnothing$

P2 Consideramos $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado

1. **(Desigualdad triangular inversa)** Muestre que se satisface la siguiente desigualdad
$$||x|| - ||y||| \leq ||x-y|| \quad \forall x, y \in E$$
2. Demuestre que la aplicación $||\cdot||$ es continua. (**Indicación:** Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, entonces $||x_n|| \to ||x||$ para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una secuencia convergente arbitraria, puede ser útil la parte anterior)
3. Considere $\alpha > 0$, pruebe que el conjunto $\{x \in E : ||x|| = \alpha\}$ es cerrado. (Recuerde que A es cerrado ssi $A = \mathrm{Adh}(A)$)

Es sabido que en el caso $E = \mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, es decir, dadas normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ existen constantes C_1 y C_2 tales que
$$||x||_1 \leq C_1||x||_2, \quad ||x||_2 \leq C_2||x||_1$$
La propiedad anterior se pierde en e.v.n's de dimensión infinita, a continuación un ejemplo en $C([0,1])$

P3 Considere $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ junto a las siguientes normas
$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad ||f||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

1. Pruebe que $C([0,1])$ es un espacio vectorial dotado de la suma y ponderación por coordenadas, demuestre que $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ son efectivamente normas sobre $C([0,1])$, y pruebe que $||f||_1 \leq ||f||_\infty \forall f \in C([0,1])$
2. Pruebe que no existe $C > 0$ tal que
$$||f||_\infty \leq C||f||_1 \quad \forall f \in C([0,1])$$
Concluya que ambas normas no son equivalentes en $C([0,1])$

P4 [Propuesto] (Ley del paralelogramo) Considere $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n con norma inducida por un producto interno de modo que $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, pruebe que se cumple la ley del paralelogramo
$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 \quad \forall u, v \in E$$

Pauta Aux 1 | 18/03

P1 Considere $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado

1. Demuestre que si $(A_i)_{i\in I}$ son abiertos, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto, pruebe además que si $(C_i)_{i\in I}$ son cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.
2. Considere $E = \mathbb{R}^n$, exhiba un caso en donde $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sean abiertos pero $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no lo sea, de igual forma encuentre $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cerrados tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ no sea cerrado
3. Demuestre que si A es abierto, entonces $\text{Int}(\text{Fr}(A)) = \varnothing$

1. Sean $(A_i)_{i\in I}$ abiertos, veamos que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

Sea $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, por definición existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$

Como A_i es abierto, x es punto interior de A_i, luego $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset A_i$.

Por definición $B_\varepsilon(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ y entonces concluimos que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto pues x es arbitrario.

Veamos que si $(C_i)_{i\in I}$ son cerrados, $\bigcap_{i\in I} C_i$ son cerrados

Notemos que equivale a probar que $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c$ es abierto.

Veamos que

$$\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} \underbrace{C_i^c}_{\text{Abiertos}},$$

Como cada C_i es cerrado tenemos que C_i^c es abierto $\forall i \in I$, luego

$$\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c$$

es una union de abiertos y por lo tanto es abierto

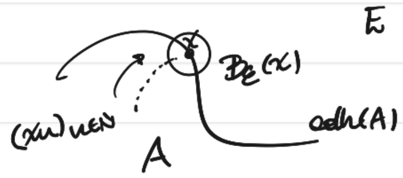
Concluimos entonces que $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.

2. Hint Consideremos $(A_i)_{i\in I} = (B(0, 1/n))_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(0, 1/n) = \{0\}$

3. Supongamos que existe $x \in \text{int}(\text{Fr}(A))$, luego existe $B_\varepsilon(x) \subset \text{Fr}(A) = \text{Adh}(A) \setminus \text{int}(A)$.

Como A es abierto, $\text{int}(A) = A$ y entonces existe

$$B_\varepsilon(x) \subset \text{Adh}(A) \setminus A$$



Pero entonces si $x \in \text{Adh}(A)$, existe una secuencia $(x_n)_n \to x$ tal que $(x_n)_n \subset A$ por definición

Luego como $(x_n)_n \to x$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, pero entonces para dicho n, $x_n \in B_\varepsilon(x)$

Como $B_\varepsilon(x) \subset \text{Adh}(A) \setminus A \Rightarrow x_n \notin A$ pero a su vez $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Concluimos que $\text{int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$

P2 Consideramos $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado

1. **(Desigualdad triangular inversa)** Muestre que se satisface la siguiente desigualdad

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| \quad \forall x, y \in E$$

2. Demuestre que la aplicación $||\cdot||$ es continua. (**Indicación:** Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, entonces $||x_n|| \to ||x||$ para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una secuencia convergente arbitraria, puede ser útil la parte anterior)

3. Considere $\alpha > 0$, pruebe que el conjunto $\{x \in E : ||x|| = \alpha\}$ es cerrado. (Recuerde que A es cerrado ssi $A = \text{Adh}(A)$)

1. Notemos que $\forall x, y \in E$ se tiene

(1) $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$

$$\boxed{\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|}$$

(2) $\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$

Como $\|y - x\| = \|x - y\|$

$$\boxed{\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|}$$

Juntando ① y ② se deduce que

$$\boxed{\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x-y\| \quad \forall x,y \in E}$$

2. Consideremos $(x_n)_n \to x$ una secuencia convergente en E, veamos que $\|x_n\| \to \|x\|$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $(x_n)_n \to x$ convergente en E, entonces

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Luego, usando la desigualdad triangular inversa tenemos para $\varepsilon > 0$ arbitrario que

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \big|\,\|x_n\| - \|x\|\,\big| \leq \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Es decir, $\|x_n\| \to \|x\|$, como $(x_n)_n \to x$ era una secuencia arbitraria concluimos que $\|\cdot\|$ es continua.

3. Sea $\alpha > 0$, veamos que $S_\alpha = \{x \in E : \|x\| = \alpha\}$ es cerrado.

Consideramos $(x_n) \subset S_\alpha \to x$, veamos que $x \in S_\alpha$ para concluir que S_α es cerrado.

Como $(x_n) \subset S_\alpha$, $\|x_n\| = \alpha$ por definición, puesto que $\|\cdot\|$ es continua

$$\underbrace{\|x_n\|}_{=\alpha} \to \|x\| \Rightarrow \|x\| = \alpha$$

Por lo tanto $x \in S_\alpha$, como $(x_n)_n$ era arbitrario concluimos que S_α es cerrado.

P3 Considere $C([0,1])$ el espacio de funciones continuas sobre $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ junto a las siguientes normas

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad ||f||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

1. Pruebe que $C([0,1])$ es un espacio vectorial dotado de la suma y ponderación por coordenadas, demuestre que $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ son efectivamente normas sobre $C([0,1])$, y pruebe que $||f||_1 \leq ||f||_\infty \forall f \in C([0,1])$

2. Pruebe que no existe $C > 0$ tal que

$$||f||_\infty \leq C||f||_1 \quad \forall f \in C([0,1])$$

Concluya que ambas normas no son equivalentes en $C([0,1])$

1. $C[0,1]$ es espacio vectorial: Vemos que por álgebra de funciones continuas, para $f,g \in C[0,1]$

$$f+g \in C([0,1]), \quad \lambda f \in C([0,1])$$

El cero es la función $f \equiv 0$, existe elemento opuesto $-f$, la suma y ponderación asocian y distribuyen con el cuerpo $\mathbb{R}$.

- $||\cdot||_1$ es norma: Sea $f \in C[0,1]$

1. No negatividad: Claramente $\int_0^1 |f(x)|\,dx \geq 0$, por lo demás, como f es continua y $|f(x)| \geq 0$

$$\int_0^1 \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} dx = 0 \overset{f\in C[0,1]}{\Rightarrow} f \equiv 0$$

2. Homogenea: $||\lambda f||_1 = |\lambda| \, ||f||_1 \quad \forall f \in C[0,1]$

Vemos

$$||\lambda f||_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)|\,dx = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\,dx = |\lambda| \, ||f||_1 \quad \forall f \in C[0,1]$$

3. Desigualdad Triangular: Notamos que $\forall f,g \in C[0,1]$

$$||f+g||_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \leq \int_0^1 |f(x)| + |g(x)|\,dx = ||f||_1 + ||g||_1$$

• **$\|\cdot\|_\infty$ es norma**: Sea $f \in C[0,1]$

1. **No negatividad**: Claramente $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \geq 0$ y si

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f = 0$$

2. **Homogenea**: $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1 \quad \forall f \in C[0,1]$

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \|f\|_\infty$$

3. **Desigualdad Triangular**: Notamos que $\forall f, g \in C[0,1]$

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Concluimos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son normas en $C[0,1]$

• <u>Veamos ahora que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$</u>

Basta notar que

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,dx$$

$$= \underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |f(x)|}_{\|f\|_\infty} \underbrace{\int_0^1 dx}_{1} = \|f\|_\infty$$

2. Pruebe que no existe $C > 0$ tal que

$$||f||_\infty \leq C||f||_1 \quad \forall f \in C[0,1]$$

Concluya que ambas normas no son equivalentes en $C[0,1]$

Intuición: Dos opciones para contradecir

1. Construir $(f_n)_n$ tal que $\|f_n\|_\infty = cte$ y $\|f_n\|_1 \to 0$ y contradecir

2. Construir $(f_n)_n$ tal que $\|f_n\|_\infty \to \infty$ y $\|f_n\|_1 = cte$ y contradecir

Dem: Supongamos existe C tal que

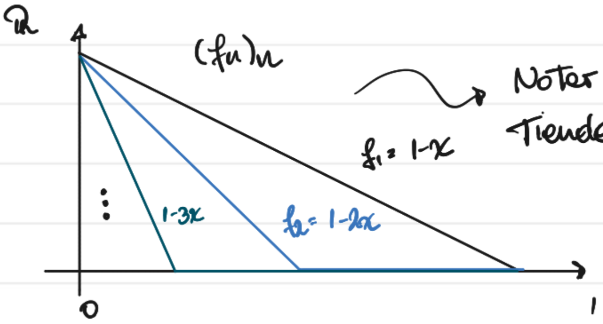
$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_1 \quad \forall f \in C[0,1]$$

Consideramos

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in (1/n, 1] \end{cases}$$

Se tiene que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$

Gráficamente:



Notar como el área tiende a cero

Notemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = 1$, por otro lado

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\,dx = \int_0^{1/n} 1-nx\,dx = \frac{1}{n} - \frac{n\cdot(1/n)^2}{2} = \frac{1}{2n}$$

Luego como $(f_n)_n \subset C([0,1])$,

$$\underbrace{\|f_n\|_\infty}_{=1} \leq C \underbrace{\|f_n\|_1}_{\to 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq \frac{C}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego, no puede existir dicha constante $C>0$, de donde concluimos que $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes en $C[0,1]$.

P4 [Propuesto] (Ley del paralelogramo) Considere $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n con norma inducida por un producto interno de modo que $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, pruebe que se cumple la ley del paralelogramo

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 \quad \forall u, v \in E$$

Sea E un evn con norma inducida por un producto interno, entonces

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle$$

Expandiendo

$$= (\langle u,u\rangle + \cancel{\langle u,v\rangle} + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle)$$
$$+ (\langle u,u\rangle + \cancel{\langle u,v\rangle} + \langle -\cancel{v},u\rangle + \langle -v,-v\rangle)$$
$$= 2\langle u,u\rangle + \langle -v,-v\rangle$$
$$= 2\|u^2\| + 2\|v\|^2$$

Gráficamente