FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 1: Topología y normas

Profesor: Alexander Frank M.
Auxiliar: Maximiliano S. Lioi

P1 Considere $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado

1. Demuestre que si $(A_i)_{i\in I}$ son abiertos, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto, pruebe además que si $(C_i)_{i\in I}$ son cerrados, entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es cerrado.
2. **[Propuesto]** Considere $E = \mathbb{R}^n$, exhiba un caso en donde $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sean abiertos pero $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ no lo sea, de igual forma encuentre $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cerrados tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ no sea cerrado
3. Demuestre que si A es abierto, entonces $\text{Int}(\text{Fr}(A)) = \varnothing$

P2 Consideramos $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado

1. **(Desigualdad triangular inversa)** Muestre que se satisface la siguiente desigualdad
$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y|| \quad \forall x, y \in E$$
2. Demuestre que la aplicación $||\cdot||$ es continua. (**Indicación:** Pruebe que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$, entonces $||x_n|| \to ||x||$ para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ una secuencia convergente arbitraria, puede ser útil la parte anterior)
3. Considere $\alpha > 0$, pruebe que el conjunto $\{x \in E : ||x|| = \alpha\}$ es cerrado. (Recuerde que A es cerrado ssi $A = \text{Adh}(A)$)

Es sabido que en el caso $E = \mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, es decir, dadas normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ existen constantes C_1 y C_2 tales que

$$||x||_1 \leq C_1||x||_2, \quad ||x||_2 \leq C_2||x||_1$$

La propiedad anterior se pierde en e.v.n's de dimensión infinita, a continuación un ejemplo en $C([0, 1])$

P3 Considere $C([0, 1])$ el espacio de funciones continuas sobre $[0, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$ junto a las siguientes normas

$$||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx, \quad ||f||_\infty = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

1. Pruebe que $C([0, 1])$ es un espacio vectorial dotado de la suma y ponderación por coordenadas, demuestre que $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ son efectivamente normas sobre $C([0, 1])$, y pruebe que $||f||_1 \leq ||f||_\infty \forall f \in C([0, 1])$
2. Pruebe que no existe $C > 0$ tal que
$$||f||_\infty \leq C||f||_1 \quad \forall f \in C([0, 1])$$

   Concluya que ambas normas no son equivalentes en $C([0, 1])$

P4 **[Propuesto] (Ley del paralelogramo)** Considere $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n con norma inducida por un producto interno de modo que $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$, pruebe que se cumple la ley del paralelogramo

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2 \quad \forall u, v \in E$$

Resumen

Definición (Norma) Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ se dice que es una norma sobre E si

1. $\forall x \in E$ se tiene $||x|| \geq 0$ y $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ se tiene $N(\lambda x) = |\lambda| ||x||$
3. $\forall x, y \in E, ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Definición (Espacio vectorial normado) Dado E un espacio vectorial, decimos que el par $(E, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado (e.v.n) para $||\cdot||$ una norma sobre E

Observación Algunas normas sobre $\mathbb{R}^n$ son las normas p para $p > 1$ de la forma

$$||x||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots |x_n|^p}$$

Cuando $p = \infty$ definimos $||x||_\infty = \max |x_1|, \cdots, |x_n|$

Definición (Producto Interno) En un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$, un producto interno es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface

- **(Bilinealidad)** $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ $\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$
- **(Simetría)** $\forall x, y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- **(Positividad)** $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{0\}$.

Observación En $\mathbb{R}^n$ el producto interno usual viene dado por $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Observación Para E un espacio vectorial con producto interno, se tiene que $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ es una norma en E.

Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) Se tiene que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle \leq ||x|| ||y||$$

Definición (Bola abierta y cerrada) Sea $(E, ||\cdot||)$ un e.v.n, definimos la bola abierta de centro $x \in E$ y radio r como el conjunto

$$B_r(x) = \{y \in E : ||x - y|| < r\}$$

Definimos la bola cerrada de mismo centro y radio como

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in E : ||x - y|| \leq r\}$$

Definición (Conjunto acotado) Decimos que $A \subset E$ es acotado si $\exists r > 0$ tal que $A \subset B(0, r)$

Definición (Conjunto abierto y cerrado) Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado y $A \subset E$, decimos que A es abierto si

$$\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } B_\varepsilon(x) \subset A$$

Decimos que A es cerrado si A^c es abierto