

Departamento de Ingeniería Matemática

MA2001-2 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Alexander Frank M.**Auxiliar:** Maximiliano S. Lioi

Resumen Cálculo Diferencial e Integral

1. Continuidad y sucesiones en $\mathbb{R}$

Def 1 Una sucesión es una función $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ en donde denotamos $s(n) = s_n$.

Además diremos que $s_n \rightarrow \ell$ si ocurre que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$

Def 2 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en $\bar{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \rightarrow \bar{x} \implies f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$$

Prop 1 (Caracterización de la continuidad) Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. Se tiene que f es continua en $\bar{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

Def 3 (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$

Def 4 Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Decimos que $(s_{\varphi(n)})_n$ es una subsucesión de (s_n) .

Teo 1 Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces $s_n \rightarrow \ell$ si y solo si todas las subsucesiones de (s_n) convergen al mismo límite.

Teo 2 (Bolzano-Weierstrass) Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

Def 5 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall x \in A$, diremos que f es continua.

Prop 2 (Álgebra de funciones continuas) Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $\bar{x} \in A \cap B$. Se tiene que

- $f \pm g$ es continua en $\bar{x}$
- λf es continua en $\bar{x}$
- $f \cdot g$ es continua en $\bar{x}$
- $\frac{f}{g}$ con $g(\bar{x}) \neq 0$ es continua en $\bar{x}$

Además, composición de funciones continuas es continua

Teo 3 (Teorema del Valor Intermedio) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \bar{x} \in [a, b]$ tal que $f(\bar{x}) = x_0$

Teo 4 (Weierstrass) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

Def 6 (Continuidad Uniforme) Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no de $x \in A$.

Prop 3 Toda función uniformemente continua es continua.

Teo 5 (Caracterización de uniforme continuidad) Consideramos $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $x \in A$

2. Derivadas y aplicaciones

Def 7 Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $x \in (a, b)$, si existe

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Prop 4 Si f derivable en $\bar{x}$ entonces es continua en $\bar{x}$

Prop 5 (Álgebra de derivadas) Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces:

- $f \pm g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f \pm g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) \pm g'(\bar{x})$$

- $f \cdot g$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(f \cdot g)' = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x})$$

- Si $g(\bar{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g^2(\bar{x})}$$

Teo 6 (Regla de la cadena) Sean $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\bar{x}$ con

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$$

Teo 7 (Derivada de la función inversa) Sea $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\bar{x} \in (a, b)$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ es derivable en $\bar{y} = f(\bar{x}) \in (c, d)$ con

$$(f^{-1})'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\bar{y}))}$$

Def 8 (Mínimo local) Consideramos $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\bar{x}$ es mínimo local de la función f si existe un entorno $\mathcal{V}(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathcal{V}(\bar{x})$$

De manera análoga se define el máximo local, si la desigualdad es estricta, decimos que es un mínimo estricto

Teo 8 Si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, entonces para $\bar{x} \in (a, b)$ mínimo local o máximo local se tiene $f'(\bar{x}) = 0$

Teo 9 (Teorema del Valor Medio) Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) . Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a))$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teo 10 (L'Hôpital) Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

con $L = 0$ o $L = \infty$, con $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Luego:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista

Teo 11 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0), $\forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente). Si la desigualdad es estricta, la monotonía también.

Def 9 (Función convexa) Diremos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ y $\forall \lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Def 10 (Función concava) Diremos que f es cóncava si $-f$ es convexa.

Teo 12 En el caso donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b) .

Def 11 (Derivadas de orden superior) Se definen las derivadas de orden superior de forma inductiva mediante:

$$f^{[k]}(x) := \left(f^{[k-1]}\right)'(x) \quad y \quad f^{[0]} = f(x)$$

Def 12 Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a, b)$ si es k -veces derivable en todo (a, b) y la función $f^{[k]} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. C^∞ , si además lo anterior se cumple para todo $k \in \mathbb{N}$, decimos que $f \in C^\infty$.

Obs. 1 Si consideramos la familia de conjuntos $C^k(a, b)$, por algebra de funciones continuas y de funciones derivables, $C^k(a, b)$ es un espacio, más aún, se puede dotar una norma $\|\cdot\|$ sobre él y obtener un espacio vectorial normado $(C^k(a, b), \|\cdot\|)$.

Def 13 (Desarrollo limitado) Diremos que $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado de orden k en torno al punto $\bar{x} \in (a, b)$ si existen constantes $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + \dots + a_k(x - \bar{x})^k + o((x - \bar{x})^k)$$

Donde $o(\cdot)$ es tal que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{o(u^k)}{u^k} = 0$. Usando el cambio de variables $h = x - \bar{x}$, el desarrollo limitado queda

$$f(\bar{x} + h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_kh^k + o(h^k)$$

Teo 13 Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ k -veces derivable en $\bar{x} \in (a, b)$, definimos la expresión

$$T_f^k(h) := f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + \frac{f''(\bar{x})}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{[k]}(\bar{x})}{k!}h^k$$

como su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\bar{x}$

Def 14 (Punto crítico) Diremos que x_* es punto crítico de una función diferenciable f si se cumple que $f'(x_*) = 0$.

3. Primitivas

Def 15 (Primitiva) Decimos que una función F continua en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en (I) es una primitiva de una función f sobre I si

$$\forall x \in \text{int}(I), \quad F'(x) = f(x)$$

Obs. 2 Si F es una primitiva de f , entonces $c \in \mathbb{R}$ se tiene que $F + c$ es una primitiva.

Def 16 Denotamos al conjunto de todas las primitivas como

$$\int f = F + c \quad \text{o bien} \quad \int f(x)dx = F(x) + c$$

Obs. 3 Notar que $\int f'(x)dx = f(x) + c$

Prop 6 Se tiene que $\int$ es un operador lineal para f en el sentido que $\int f \pm g = \int f \pm \int g$ y también $\int \lambda f = \lambda \int f, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Teo 14 (Cambio de Variable) Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

Teo 15 (Integración por Partes) Sean u y v dos funciones de x , entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Prop 7 (Sustituciones trigonométricas) Se recomiendan los siguientes cambios de variables

- para $a^2 + x^2$, usar $x = a \tan(v)$ o $x = a \sinh(v)$
- para $a^2 - x^2$, usar $x = a \sin(t)$ o $x = a \cos(t)$
- para $x^2 - a^2$, usar $x = a \sec(v)$ o $x = a \cosh(v)$

Prop 8 (Fracciones parciales) Si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\text{gr}(Q) > \text{gr}(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

Prop 9 (Integrales trigonométricas) Sea $R(\cos(x), \sin(x))$ en forma de fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $\sin(x)$ y $\cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, con esto se tiene que

- Se sustituye el diferencial $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$
- $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Prop 10

- 1.- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$
- 2.- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
- 3.- $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
- 4.- $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$
- 5.- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
- 6.- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$
- 7.- $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$
- 8.- $\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + C$
- 9.- $\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + C$
- 10.- $\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C$
- 11.- $\int \text{cosec}^2(x)dx = -\cotg(x) + C$
- 12.- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

4. Integral de Riemann

Def 17 Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i - x_{i-1}$$

denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ como $\mathcal{P}_{[a, b]}$.

Def 18 Diremos que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalonada si existe $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partición con f constante en $(x_{i-1}, x_i) \forall i$

Def 19 Sean P y Q dos particiones de $[a, b]$, diremos que Q refina P si $P \subseteq Q$.

Def 20 (Suma superior e inferior) Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Como f es acotada en $[a, b]$, también lo es en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, \dots, n$, luego podemos definir:

$$m_i(f) = \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

(La existencia de $m_i(f)$ y $M_i(f)$ está garantizada por ser f acotada en $[x_{i-1}, x_i]$). Con esto se definen las sumas siguientes:

1. $S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma superior de f correspondiente a la partición P
2. $s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P

Def 21 Sea $\mathcal{P}_{[a, b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a, b]$. Los números reales

$$\int_a^b f = \sup \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[a, b]}\}$$

$$\int_a^b f = \inf \{S(f, P) : P \in \mathcal{P}_{[a, b]}\}$$

se llaman integral inferior de f en $[a, b]$ e integral superior de f en $[a, b]$, respectivamente.

Prop 11 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces es integrable en $[a, b]$.

Prop 12 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a, b]$.

Teo 16 Se tiene que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es Riemann-integrable si y solo si f es acotada y continua casi en todas partes, es decir, el conjunto de discontinuidades tiene medida nula.

Obs. 4 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es discontinua en un intervalo $D \subset [a, b]$ entonces no puede ser Riemman-integrable, un ejemplo de esto es la función $\mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a, b]}(\cdot)$ que no es Riemman-integrable en $[a, b]$.

Teo 17 (Condición de Riemann) Si f es continua en $[a, b]$ Entonces:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) (\forall P \in \mathcal{P}_{[a, b]})$$

$$\left\{ |P| \leq \delta \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon \right\},$$

donde los valores $\bar{x}_i$ son números arbitrarios en el correspondiente i -ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido por la partición P . (por ejemplo $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$)

Prop 13 Propiedades de la integral de Riemann

- $\int_a^b c = c(b - a)$
- $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a, b]$
- $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$
- $\int_a^b (f + \alpha g) = \int_a^b f + \alpha \int_a^b g$

Def 22 Si f integrable y $a \geq b$ se define

- $\int_a^b f := - \int_b^a f$ si $a > b$
- $\int_a^b f := 0$ si $a = b$

Prop 14 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces la función $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a, b]$.

Teo 18 (Primera versión del TFC) Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces G es derivable en $\text{int}(I)$ y $\forall x \in \text{int}(I)$:

$$G'(x) = f(x)$$

Prop 15 Si la función F , continua en I es una primitiva cualquiera de f en I , entonces:

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Prop 16 (Segunda versión del TFC) Sea f integrable en $[a, b]$, si existe una función F continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que: $F' = f$ en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Prop 17 (Integración por partes) Sean f y g dos funciones continuas en I intervalo y diferenciables en $\text{int}(I)$. Sean $a, b \in \text{int}(I)$. Si f' y g' entonces:

$$\int_a^b f g' = f g|_a^b - \int_a^b g f'$$

Prop 18 (Cambio de variable) Sea g continua en I y derivable en $\text{int}(I)$, con g' continua. Sean $a, b \in \text{int}(I)$ con $a < b$. Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Def 23 (Promedio de una función) Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama promedio de f en $[a, b]$ a la cantidad

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Se anota como $\bar{f}$ o $\langle f \rangle$.

Teo 19 (Teorema del Valor medio Integral) Si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que

$$\int_a^b f g = f(\xi) \int_a^b g$$

Teo 20 (Taylor con Resto Integral) Sea I un intervalo abierto tal que $[x_0, x] \subseteq I$ y sea $f \in C^{(n+1)}(I)$, con P_n su polinomio de Taylor de orden n . Entonces

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

en donde llamamos resto integral de Taylor a la cantidad:

$$R_n(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

5. Aplicaciones de la Integral

Consideraremos la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [0, f(x)]\}$$

Prop 19 (Área de una región) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función $R.I.$, el área de la región R se calcula como:

$$A_a^b(R) = \int_a^b |f|$$

Prop 20 Es posible integrar a lo largo del eje OY mediante la formula

$$A = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (x_2(y) - x_1(y)) dy$$

Prop 21 (Rotación en torno eje OX) Dada la región R en el plano, el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Prop 22 (Rotación en torno eje OY) Dada la región R en el plano con $0 \leq a < b$, el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Def 24 (Largo de curva) Sea $f \in C^1$, se define su longitud de la curva f entre a y b por:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

Def 25 (Superficie de un manto generado) Sea $f \in C^1$, el área del manto generado por la rotación en torno al eje OX de f entre a y b viene dado por:

$$S_{OX}(f) = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + |f'(x)|^2} dx$$

Def 26 (Coordenadas polares) Dado reales r y θ , se determina el punto P del plano de coordenadas (x, y) mediante las fórmulas

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

Def 27 (Área en coordenadas polares) Sea $\rho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\theta)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) : \theta \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\theta)]\}$ está dada por:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\theta)^2 d\theta$$

6. Integrales Impropias

Def 28 (Integral Impropia de Primera Especie) Sea $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple:

1. $\forall x \in (a, \infty)$, f es integrable en $[a, x]$.
2. $\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx$ existe.

De manera análoga se define la cantidad

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

Prop 23 Dado $a > 0$. Luego $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^s}$ converge si y sólo si $s > 1$.

Def 29 (Integral Impropia de Segunda Especie) Sea $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ si se cumple:

1. $\forall x \in (a, b)$, f es integrable en $[a, x]$.
2. $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x) dx$ existe.

En caso de que lo anterior exista denotaremos $\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x) dx$.

Def 30 (Integral Impropia de Tercera Especie) Son aquellas que se pueden escribir como integrales impropias de 1° y 2° especie. Estas integrales convergen si cada una de las integrales en las que se separan convergen.

Teo 21 (Criterio de Comparación) Sean g, f continuas tal que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ a partir de $x \geq a$. Luego si $\int_a^{\infty} g$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f$ converge, de manera recíproca si $\int_a^{\infty} f$ diverge $\int_a^{\infty} g$ también.

Teo 22 (Criterio de Cuociente) Sean f, g continuas tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Luego si $\int_a^{\infty} g$ y $\int_a^{\infty} f$ convergen o divergen juntas.

Obs. 5 Los criterios de convergencia anteriores sirven también para integrales de segunda especie, reemplazando ∞ por b^- .

Def 31 Diremos que $\int_a^{\infty} f$ es absolutamente convergente si $\int_a^{\infty} |f|$ converge.

Prop 24 Si $\int_a^{\infty} |f|$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f$ converge.

Prop 25 ■ Para $a > 0$ la integral $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si y solo si $\alpha > 1$.

■ Para $a < b$ la integral $\int_a^{b^-} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ converge si y solo si $\alpha < 1$.

Prop 26 ■ $\int_{a>1}^{\infty} f(x) dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = L > 0$ con

- $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha f(-x) = L > 0$ con $\alpha > 1$.
- $\int_a^{b^-} f(x) dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow b^-} (b-x)^\alpha f(-x) = L > 0$ con $\alpha < 1$.
- $\int_{a^+}^b f(x) dx$ converge si $\lim_{x \rightarrow a^+} (b-x)^\alpha f(x) = L > 0$ con $\alpha < 1$.

7. Series

Def 32 Dado una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, se define sus sumas parciales como $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. El valor de la serie asociada existe cuando la sucesión (S_n) posee el límite, y en tal caso la serie se dice convergente y su valor es el límite de (S_n) .

Prop 27 Si $\sum a_k$ converge, entonces $a_n \rightarrow 0$.

Prop 28 Sean $\sum a_k$ y $\sum b_k$ dos series convergentes y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la siguiente suma converge:

$$\sum (a_k + \lambda b_k) = \sum a_k + \lambda \sum b_k$$

Teo 23 Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones no negativas de manera que existe n_0 y $\alpha > 0$ tales que, para todo $n \geq n_0$, $a_n \leq \alpha b_n$. Se tiene que si $\sum b_k < \infty$, entonces $\sum a_k < \infty$.

Teo 24 (Comparación por Cuociente) Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones positivas tales que $c = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe.

- Si $c = 0$ y $\sum b_k$ converge, entonces $\sum a_k$ converge.
- Si $c > 0$, $\sum b_k$ converge si y sólo si $\sum a_k$ converge.

Teo 25 (Criterio del Cuociente) Sea (a_n) una sucesión tal que $r = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe.

- Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
- Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.
- Si $r = 1$ es indeterminado.

Teo 26 (Criterio de la Raíz) Sea (a_n) una sucesión de términos no negativos tal que $r = \lim (a_n)^{1/n}$ existe.

- Si $r < 1$ entonces $\sum a_k$ converge.
- Si $r > 1$ o $r = \infty$ entonces $\sum a_k$ diverge.
- Si $r = 1$ no se sabe.

Obs. 6 En este criterio se puede reemplazar r por $r = \limsup_n a_n = \limsup_n \{a_k : k \geq n\}$

Teo 27 (Criterio de la Integral) Sea $k \in \mathbb{N}$ y $f : [k, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función decreciente. Se tiene que $\sum_{n \geq k} f(n)$ converge si y sólo si $\int_k^\infty f(x) dx$ converge.

Def 33 Sea (a_k) una sucesión. Diremos que $\sum a_k$ es absolutamente convergente si $\sum |a_k|$ converge.

Prop 29 Toda serie absolutamente convergente es convergente. Además una serie es absolutamente convergente si y sólo si la series de sus términos negativos y la de sus términos positivos convergen.

Teo 28 (Criterio de Leibniz) Sea (a_n) una sucesión decreciente tal que $a_n \rightarrow 0$. Entonces $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.

Series de Potencia

Def 34 (Series de Potencias) Una serie de potencias es una serie de la forma: $\sum_{k=0}^\infty a_k (x - \alpha)^k$, para este curso estudiaremos el caso de $\alpha = 0$.

Prop 30 Si la serie $\sum a_k x_0^k$ convergen, entonces para todo $a \in (0, |x_0|)$ y para todo $x \in [-a, a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.

Def 35 (Radio de convergencia) Se define el radio de convergencia R como

$$R = \sup \left\{ x_0 : \sum_{k=0}^\infty a_k x_0^k < \infty \right\}$$

Def 36 (Intervalo de convergencia) Intervalo I tal que $\forall x \in I$ la serie de potencias converge, se debe cumplir que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$. ma

Prop 31 Para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias de la forma $\sum_{k \geq n_0} a_n x^n$ existe las siguientes tres formas (todas entregaran el mismo valor si existe).

1. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
2. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} (|a_n|)^{\frac{1}{n}}$
3. $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (|a_k|)^{\frac{1}{k}}$

En caso de existir L se tiene que el radio de convergencia es: $R = \frac{1}{L}$ (siendo cero si $L = \infty$).

Prop 32 Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

Esta función es continua, infinitamente e integrable en I . Más aún las integrales y derivadas son término a término, esto es que la derivada o la integral la pueden "pasar" para dentro de la serie.

Prop 33 Sea $\sum a_k x^k$ una serie de potencias de radio de convergencia $R > 0$. Entonces para todo $p \in \mathbb{Z}$, la serie $\sum k^p a_k x^k$ tiene radio de convergencia R .

Prop 34 Dadas dos series de potencias $\sum a_k x^k$ y $\sum b_k x^k$ convergentes para x_0 . Entonces la serie $\sum (a_k + b_k) x^k$ converge para todo $x \in (-|x_0|, |x_0|)$ y se tiene que $\sum (a_k + b_k) x^k = \sum a_k x^k + \sum b_k x^k$.

Prop 35 Se tiene que la siguiente función converge para $|x| < 1$ $f(x) = \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$.