

Recordatorios:

- Para $\mathbb{R}^n$ se define su producto interno mediante $\langle u, v \rangle := \sum_{k=1}^n u_k \cdot v_k$ $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 - $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal y simétrico.
 - $\langle v, v \rangle = 0$ si y sólo si $v = 0$.

• 2 vectores se dicen ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

• un vector es "normado" (tiene norma 1) si $\langle u, u \rangle = 1$.

Def Es proyección ortogonal sobre W se $\square$. W sub de $\mathbb{R}^n$; $\{u_1, \dots, u_k\}$ base ortonormal de W . Definimos la proyección sobre W de x mediante:

$$\left[\begin{array}{l} P_W : \mathbb{R}^n \longrightarrow W \\ x \longmapsto P_W(x) := \sum_{i=1}^k u_i \cdot \langle u_i, x \rangle \end{array} \right]$$

Propiedades: sea W sub de $\mathbb{R}^n$, P su proyección ortogonal.

- i. - P es lineal.
 - ii. - $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall w \in W \quad (x - P(x)) \perp w$
 - iii. - $d(x, P(x)) = \min_{w \in W} d(x, w)$.
- } sin demostrar
Prop 4.7 Apunte.

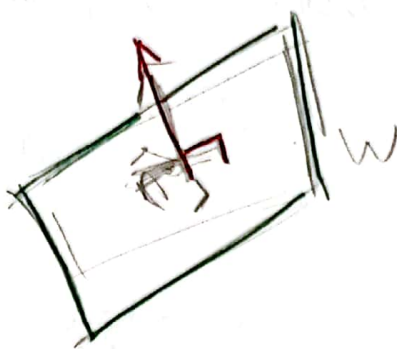
Subespacio ortogonal:

Idea con dibujo en $\mathbb{R}^3$

Como fue clasificado toda
proyección del vector rojo

también será ortogonal

a W . $\rightarrow$ esto se puede generalizar.



Def [subespacio ortogonal] Sea $W \subseteq \mathbb{R}^n$ sea. se define
el subespacio ortogonal de W como:

$$[W^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, w \rangle = 0 \forall w \in W\}]$$

Prop: Propiedades de $W^\perp$.

- i.- $W^\perp$ es un sub de $\mathbb{R}^n$.
- ii.- $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$
- iii.- $\dim(W^\perp) = n - \dim(W)$.

Dem:

i.- Usaremos caract. compacta. Sean $u, v \in W^\perp$ porq
 $\alpha \in \mathbb{R}$
 $\alpha u + v \in W^\perp$.

Esto es que basta probar que $\langle \alpha u + v, w \rangle = 0 \forall w \in W$.
En efecto, sea $w \in W$ arbitrario, vemos que:

$$\langle \alpha u + v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0 \quad \text{pues } u, v \in W^\perp.$$

$$\text{i.e. } \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle = 0.$$

ii.- Debemos probar: (a) $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$
 (b) $W \cap W^\perp = \{0\}$.

(a) a efecto $\supseteq$ es directa. Para ver $\subseteq$ basta notar
 que: sea $v \in \mathbb{R}^n$. Claramente, si tomamos P_W la
 proyección sobre W : $v = \underbrace{v - P_W(v)}_u + \underbrace{P_W(v)}_w$

Por definición de proyección: $w \in W$.

Por la prop. de propiedades de P_W : $u \in W^\perp$.

con ello: $\exists u \in W^\perp ; w \in W$ tal que $v = u + w$.
 $\forall v \in \mathbb{R}^n$

esto es, por def, $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v \in W + W^\perp$ i.e.

$W + W^\perp = \mathbb{R}^n$. Con ello $\mathbb{R}^n = W + W^\perp$.

(b) sea $v \in W \cap W^\perp$. Como $v \in W^\perp$: $\forall w \in W$
 $\langle v, w \rangle = 0$; tomando $w = v$: $\langle v, v \rangle = 0$

$\Leftrightarrow v = 0$ //

iii.- directo de ii: como $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$:

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(W) + \dim(W^\perp) - \underbrace{\dim(W \cap W^\perp)}_{\substack{0 \text{ por } \\ (ii)}} \xrightarrow{\quad} n$$

$\hookrightarrow$ así implica lo pedido.

Ejemplo descomposición según $W \oplus W^\perp$.

$$W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

a) Bases ortonormales W y $W^\perp$.

Gram-Schmidt sobre $\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}; \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}; \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}; \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}} \right\}.$

$$\bullet u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet z_2 = \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle u_1 = 0 \cdot u_1 = 0 //$$

$$\Rightarrow w_2 = v_2 - z_2 = v_2 \Rightarrow u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet z_3 = \langle v_3, u_1 \rangle u_1 + \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot u_1$$

$$+ \left\langle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot u_2 = \frac{0}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{-4}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow w_3 = v_3 - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

como queda en 0 no se agrega a la base.

$$\bullet z_4 = \langle v_4, u_1 \rangle u_1 + \langle v_4, u_2 \rangle u_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle u_1 + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle u_2$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow w_4 = 0 //$$

⇒ con ello: $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}_{u_2} \right\}$ es base ortonormal de W

Para $W^\perp$ busquemos primero una base cualquiera y le aplicamos G-S.

Idea: si $v \in \mathbb{R}^n$ cumple $\langle v, u_1 \rangle = \langle v, u_2 \rangle = 0$
entonces $\forall w = \alpha u_1 + \beta u_2 \in W$: $\langle v, w \rangle = \alpha \langle v, u_1 \rangle + \beta \langle v, u_2 \rangle = 0$
Es decir, basta encontrar los vectores ortogonales a u_1 y u_2 .

Vemos: si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ es ortogonal a $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\frac{a+b+c+d}{2} \Rightarrow a+b+c+d = 0.$$

A su vez, si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ es ortogonal a $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{a-b+c-d}{2} = 0 \Rightarrow a-b+c-d = 0$$

Es decir buscamos los $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ tales que

$$\begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ a-b+c-d = 0 \end{cases} \text{ sist. lineal!}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a+b+c+d &= 0 \rightarrow c = -a \\ -2b-2d &= 0 \rightarrow d = -b \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{buscamos vectores de forma } \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \\ -b \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } W^\perp$$

(gen. y es l.i.)

Además. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow$ ya son ortogonales.

Con ello basta normalizar. $\rightarrow$ dividir cada v por $\sqrt{\langle v, v \rangle}$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

b) Descomponer $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $W + W^\perp$.

Sabemos que los elementos de W son de forma:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \\ \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

y los de $W^\perp$ son de forma $\begin{pmatrix} c \\ d \\ -c \\ -d \end{pmatrix}$

Con ello, debemos resolver el sistema.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}}_{\substack{w \in W \\ \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \\ a-c \\ b-d \end{pmatrix}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \\ -c \\ -d \end{pmatrix}}_{\substack{v \in W^\perp}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+c=1 \\ b+d=2 \\ -2c=2 \\ -2d=2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \\ c=-1 \\ d=-1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{w \in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v \in W^\perp}$$