Pauta Aux #11 linAl

P1) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Diagonalizar B.

Notemos que B es simétrica, i.e, B es diagonalizable.

Calculemos su polinomio característico, i.e, $\det(B - \lambda I)$

$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$- (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} + 0 \cdot \text{cosas} =$

$= (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) + [-1 \cdot (2-\lambda)]$

$= (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)^2 - 1] = (2-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1]$

$= (2-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 4\lambda + 3] = (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1)$

$\Rightarrow \{1, 2, 3\}$ son los vp's de B.

Cada uno con multiplicidad algebraica 1, luego, como B es diagonalizable, sus multiplicidades geométricas también son 1.

Busquemos sus vectores propios:

$\underline{\lambda=1}$: $(B-1\cdot I|0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=y \\ z=0 \end{array}\right\}$ $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ son las soluciones $\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ es base de W_1

$\underline{\lambda=2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z \text{ libre} \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ son las soluciones

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es base de W_2

$\underline{\lambda=3}$. $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=-x \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$ son las soluciones $\rightarrow \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ base de W_3.

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. //

P2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) vp's de A. resolvemos $\det(A-\lambda I)=0$.

$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) \Rightarrow$

tenemos vp's:

- $\lambda = 1$ con mult. Algebráica 1
- $\lambda = 3$ con mult. Algebráica 2.

b) Pruebe: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son $\vec{vp}$'s de A.

En efecto.

$* \; A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{vp}$ Asociado a $\lambda = 1$.

$* \; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{vp}$ Asociado a $\lambda = 3$.

$* \; A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{vp}$ Asociado a $\lambda = 3$ //.

c) Justifique existencia de base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ compuesta por $\vec{vp}$'s de A.

En efecto, existe pues A es simétrica.

d) Encuéntrela usando Gram-Schmidt.

Seguiremos la notación del Apunte.

Tenemos $\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3$

- $u_1 = \dfrac{v_1}{\sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

- $-Z_2 = \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = 0 \, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$-W_2 = v_2 - Z_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

$-u_2 = \dfrac{W_2}{\sqrt{\langle W_2, W_2 \rangle}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

- $-Z_3 = \langle v_3, u_1 \rangle u_1 + \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle u_1$

$+ \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$

$-W_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$

$-u_3 = \dfrac{W_3}{\sqrt{\langle W_3, W_3 \rangle}} = \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}} = \begin{pmatrix}-1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix} \cdot \dfrac{3}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

e) Encontrar P y D.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

diagonal con una aparición de cada op por cada vez que sea solución de $\det(A - I \cdot \lambda) = 0$ (i.e. λ aparece "$\alpha(\lambda)$" veces)

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

f) Calcule P^{-1} con un truco.

Recordar (importante) cuando una matriz P es ortonormal (es decir sus columnas son un conjunto ortonormal) $P^{-1} = P^T$. Con ello:

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$\boxed{P3}$ $A, P, D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ P invertible, D diagonal, $A = PDP^{-1}$

Pruebe:

a) A^2 diagonalizable y encuentre sus vp's en función de los de A.

En efecto sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los vp de A, vemos que:

$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1}) \cdot PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

con ello: A^2 es diagonalizable y sus vp's corresponden a la diagonal de D^2, que es $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_k^2$.

b) Si $D_{ii} \neq 0$ $\forall i$, pruebe:

i) A invertible.

Como $D_{ii} \neq 0$ $\forall i$: D es invertible

y $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \frac{1}{D_{22}} & \cdots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \frac{1}{D_{nn}} \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$ con ello A es invertible por ser producto de matrices invertibles.

ii) A^{-1} diagonalizable

$\Rightarrow$ Con ello: $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = P^{-1^{-1}} D^{-1} P^{-1}$

$= PD^{-1}P^{-1}$ es decir, A diagonalizable y sus vp's son $\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}$.

c) $A^3 = 0 \Rightarrow A = 0$. En efecto:

$A^3 = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} = 0 \rightarrow PD^3P^{-1} = 0$

Multiplicando por P y P^{-1} a cada lado

$D^3 = 0 \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall k$.

$\Rightarrow D = 0 \Rightarrow A = PDP^{-1} = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = 0$

$\Rightarrow A = 0$.