MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 11: Diagonalicemos entonces.

24 de junio de 2024

P1. Camino fácil. Sea la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores propios de B, sus multiplicidades algebraicas y geométricas, y sus vectores propios. Encuentre P invertible y D diagonal tales que $B = PDP^{-1}$.
Propuesto: calcule P^{-1} explícitamente usando el algoritmo de inversión visto a inicios de semestre, u algún otro método (como por ejemplo algo similar a lo usado en la P2).

P2. Camino difícil. Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Encuentre la descomposición PDP^T de A de la siguiente manera:

a) Encuentre los valores propios de A.
b) Pruebe que los siguientes vectores son vectores propios de A:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Justifique que existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ compuesta de vectores propios de A.
d) Encuéntrela usando Gram-Schmidt sobre los vectores dados en b).
e) Con la base obtenida, construya P y D tales que $A = PDP^{-1}$.
f) Calcule P^{-1} en menos de un minuto.

P3. Fundamentos para repasar. Sean $A, P, D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ tales que P es invertible, D es diagonal y $A = PDP^{-1}$. Pruebe que:

a) A^2 es diagonalizable y de sus los valores propios en términos de $D_{1,1}, ..., D_{n,n}$.
b) Si $D_{i,i} \neq 0$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, entonces:
   (i) A es invertible.
   (ii) A^{-1} es diagonalizable y de los valores propios de A^{-1} en términos de $D_{1,1}, ..., D_{n,n}$.
c) Si $A^3 = 0$, entonces $A = 0$.