MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 10: Más valores y Vectores propios

10 de junio de 2024

P1. Los parámetros no se van. Considere la siguiente matriz, para $a \in \mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine para qué valores de a la matriz B es diagonalizable.

P2. Los clásicos nunca mueren. Sea la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre los valores propios de B, sus multiplicidades algebraicas y geométricas, y sus vectores propios.

P3. Tres por el precio de uno. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable. Pruebe que $A^2, A^T y I + A$ son diagonalizables y encuentre sus valores propios, considerando que los de A son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

P4. Truco para la vida. Considere A una matriz cuadrada, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ un valor propio de A. El objetivo de esta pregunta es probar que:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda_0) \leq \alpha_A(\lambda_0) \leq n$$

Donde:

- $\gamma_A(\lambda_0)$ es la multiplicidad geométrica del valor propio λ_0, i.e. $\dim(W_{\lambda_0})$.
- $\alpha_A(\lambda_0)$ es la multiplicidad algebráica del valor propio λ_0, i.e., su multiplicidad algebráica como solución de $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$, el polinomio característico de A.

Para esto siga los siguientes pasos.

a) Pruebe las desigualdades:

$$1 \leq \gamma_A(\lambda_0) \quad \wedge \quad \alpha_A(\lambda_0) \leq n$$

b) Sea $\gamma = \gamma_A(\lambda_0)$. Considere una base $\beta_{\lambda_0} = \{v_1, \ldots, v_\gamma\}$ de $W_{\lambda_0} = Ker(A - \lambda_0 I)$. Extienda dicha base a una base $\beta = \{v_1, \ldots, v_\gamma, v_{\gamma+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Considere la matriz representante de $T(x) = Ax$ con respecto a la base β, es decir, $M_{\beta\beta}(T)$, y en base a esta matriz derive una expresión que relacione su polinomio característico con λ_0.

c) Muestre que $\gamma_A(\lambda_0) \leq \alpha_{M_{\beta\beta}(T)}(\lambda_0)$ y que $\alpha_{M_{\beta\beta}(T)}(\lambda_0) = \alpha_A(\lambda_0)$. Concluya.