

P1. Considere la transformación $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (1 punto) Demuestre que T es lineal.
- (3 puntos) Calcule una base de $\text{Ker}(T)$, el núcleo de T . Determine la dimensión del núcleo y la dimensión de $\text{Im}(T)$, la imagen de T .
- (2 puntos) Considere las bases canónicas

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Determine $M \in \mathcal{M}_{2 \times 4}(\mathbb{R})$, la matriz representante de T con respecto a las bases A en la partida y B en la llegada.

I) Basta notar que sean $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$T(\alpha M_1 + M_2) = [\alpha M_1 + M_2] \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha T(M_1) + T(M_2)$$

con ello T lineal.

II) Base de $\text{Ker}(T)$. y $\dim(\text{Ker}(T))$ y $\dim(\text{Im}(T))$

Buscamos $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Ⓐ es equivalente a que:

$$\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -a/2 \\ d = -c/2 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & -a/2 \\ c & -c/2 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

son una base de $\text{Ker}(T)$ pues lo generan y son l.i.

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(T)) = 2 \Rightarrow \text{por TNS: } \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathcal{M}_{2 \times 2}) - \dim(\text{Ker}(T)) = 4 - 2 = 2$$

III) Consideremos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como vimos $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}$

lo puedo escribir como $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Como sabemos pasar de base canónica a base canónica es sencillo, pues basta escribir matricialmente los ponderadores que definen T . (Es decir

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{1}a + \underline{2}b + \underline{0}c + \underline{0}d \\ \underline{0}a + \underline{0}b + \underline{1}c + \underline{2}d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

P2. 2.1) (3 Puntos) Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal que satisface la propiedad: para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$T(T(x)) = T(x),$$

es decir T^2 , la composición $T \circ T$, es igual a T .

- I) (1 punto) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se satisface: $x - T(x)$ pertenece al $\text{Ker}(T)$.
- II) (1 punto) Pruebe que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.
- III) (1 punto) Pruebe que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ y concluya que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$

2.2) (3 puntos) Considere $C = \{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\}$, subconjunto del espacio vectorial $P_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 a coeficientes en \mathbb{R} . Sea W el subespacio generado por C , es decir

$$W = \langle \{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\} \rangle.$$

- I) (1.5 puntos) Encuentre un subconjunto de C que sea base de W .
- II) (1.5 puntos) Extienda la base de W que obtuvo en el punto anterior a una base de $P_2(\mathbb{R})$.

I) $\forall x \in \mathbb{R}^n : x - T(x) \in \text{Ker}(T)$ En efecto sea $x \in \mathbb{R}^n$

PDQ $T(x - T(x)) = 0$. Basta notar que: por linealidad de T :

$$\begin{aligned} T(x - T(x)) &= T(x) - T(T(x)) = T(x) - T \circ T(x) \\ &= T(x) - T(x) = 0. \end{aligned}$$

con ello, se concluye.

II) $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$ como ev's. en efecto:

es directo pues $\text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ y \mathbb{R}^n es e.v.
 $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^n$

es sea $v \in \mathbb{R}^n$ PDQ $\exists u_1, u_2$ con $u_1 \in \text{Ker}(T)$ y $u_2 \in \text{Im}(T)$ tal que $v = u_1 + u_2$.

Basta notar que:

$$v = \underbrace{v - T(v)}_{\in \text{Ker}(T) \text{ por I}} + \underbrace{T(v)}_{\in \text{Im}(T) \text{ por def.}}$$

Tomando
 $u_1 = v - T(v)$
 $u_2 = T(v)$

Se obtiene la descomposición pedida.

III) $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$

Probamos en II) que $\text{Im}(T) + \text{Ker}(T) = \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}(T) + \text{Ker}(T)) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) - \dim(\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T))$$

$\xrightarrow{\text{n por TIII}}$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T)) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Im}(T) \cap \text{Ker}(T) = \{0\}$$

2.2) (3 puntos) Considere $C = \{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\}$, subconjunto del espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 a coeficientes en \mathbb{R} . Sea W el subespacio generado por C , es decir

$$W = \langle \{2x^2 - 1, x^2 + 1, 3\} \rangle.$$

i) (1.5 puntos) Encuentre un subconjunto de C que sea base de W .

ii) (1.5 puntos) Extienda la base de W que obtuvo en el punto anterior a una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

I) Basta encontrar un elemento de C que sea l.i.

Notamos:

$$-(2x^2 - 1) + 2(x^2 + 1) = 3$$

es decir el 3 es l.i. en C .

A su vez: $\{2x^2 - 1, x^2 + 1\}$ es l.i., y con ello es base.

II) Expandir $\{ \underbrace{2x^2 - 1}_{\text{li}}, \underbrace{x^2 + 1}_{\text{li}} \}$ a una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Consideremos: $x \notin W$. Entonces postulamos

$\{2x^2 - 1, x, x^2 + 1\}$ como base,

• Vemos que es l.i.,

• el conjunto obtenido tiene tamaño 3

} \Rightarrow es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$,