

Control 2 2023-2

P1. Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ (los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2) la función tal que

$$T(u) = (u_1 + u_4) + (u_2 + u_3)x + (u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4)x^2$$

donde u_1, u_2, u_3, u_4 son las coordenadas de $u \in \mathbb{R}^4$.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

- (2 pts.) Pruebe que T es una transformación lineal.
- (2 pts.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^4 y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.
- (2 pts.) Usando matrices de cambio de base y la matriz encontrada en b), calcular la matriz representante de T con respecto a las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$$

respectivamente.

a) En efecto, sean $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Prd: $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$.

En efecto:

$$\alpha u + v = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + v_1 \\ \alpha u_2 + v_2 \\ \alpha u_3 + v_3 \\ \alpha u_4 + v_4 \end{pmatrix} \quad \text{Aplicando } T:$$

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= (\alpha u_1 + v_1 + \alpha u_4 + v_4) \cdot 1 \\ &\quad + (\alpha u_2 + v_2 + \alpha u_3 + v_3) \cdot x \\ &\quad + [(\alpha u_1 + v_1) + (\alpha u_2 + v_2) + 2(\alpha u_3 + v_3) + (\alpha u_4 + v_4)] \cdot x^2 \end{aligned}$$

Ordenando términos:

$$\begin{aligned} &= \alpha [(u_1 + u_4) \cdot 1 + (u_2 + u_3) \cdot x + (u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4)x^2] \\ &\quad + [(v_1 + v_4) \cdot 1 + (v_2 + v_3) \cdot x + (v_1 + v_2 + 2v_3 + v_4)x^2] \end{aligned}$$

Por def de T : $= \alpha \cdot T(u) + T(v) \Rightarrow T$ es lineal \square

P1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ (los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2) la función tal que

$$T(u) = (u_1 + u_4) + (u_2 + u_3)x + (u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4)x^2$$

donde u_1, u_2, u_3, u_4 son las coordenadas de $u \in \mathbb{R}^4$.

- (2 ptos.) Pruebe que T es una transformación lineal.
- (2 ptos.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^4 y $\mathbb{R}_2[x]$ respectivamente.
- (2 ptos.) Usando matrices de cambio de base y la matriz encontrada en b), calcular la matriz representante de T con respecto a las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$$

respectivamente.

b) Consideraremos:

$$E_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Base canónica de \mathbb{R}^4

$$E_2 = \{1, x, x^2\} \text{ Base canónica de } \mathbb{R}_2[\mathbb{R}],$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ la base de } \mathbb{R}^3 \text{ correspondiente a "E}_2\text{"}$$

Con ello, evaluemos T en la base E_1

$$\bullet T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + x + x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bullet T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con ello la matriz representante de T de la siguiente manera:

$$A = \left[T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

c) (2 pts.) Calcular la matriz representante de T con respecto a las bases

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$$

respectivamente, usando matrices de cambio de base y la matriz encontrada en b).

$$M = P \cdot A \cdot Q$$

Donde:

- Q es la matriz que pasa de B_1 a \mathbb{C}_1

- A es la matriz representante de T entre bases canónicas,

- P pasa de \mathbb{C}_2 a B_2

1) Tip: Pasar de base canónica a base canónica es "fácil";

→ Basta escribir B_1 como columnas.

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ esto se puede llegar y hacer.

2) Pasar de base canónica a base cualquiera (i.e. encontrar P) es más difícil.

2 momentos:

1.- Escribir la matriz U para una de $B_2 \rightarrow \mathbb{C}_2$ y calcular su inversa:

$$B_2 = \left\{ \overset{\downarrow}{1+x}, \overset{\downarrow}{x+x^2}, \overset{\downarrow}{1+x^2} \right\}$$

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{tenemos } P = U^{-1}$$

2.- Escribir los elementos de la base canónica como comb. lineal de los elementos de B_2 y obtener los coef. asociados y escribirlos como matriz por columna:

$$1 = \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(x+x^2) + \frac{1}{2}(1+x^2)$$

$$\Rightarrow [1]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

→ Vamos a hacer esto para x y x^2 también.

Esta descomposición puede hacerse:

- Al ojo

- resolviendo el sist: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• X : mapeado con el método 2 (sistema)

$$X \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \quad \text{por lo tanto el sist queda:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

escalamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{lcl} \text{i.} & \alpha + \gamma = 0 & \alpha = -\gamma \\ \text{ii.} & \beta - \gamma = 1 & \beta = 1 - \gamma \\ \text{iii.} & 2\gamma = -1 & \gamma = -\frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \\ \gamma = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}(1+x) + \frac{3}{2}(x+x^2) - \frac{1}{2}(1+x^2)$$

$$\Rightarrow [X]_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$$

$$X^2 = \frac{-1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(x+x^2) + \frac{1}{2}(1+x^2)$$

$$\Rightarrow [X^2]_{B_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow P = \left[[1]_{B_2} \mid [X]_{B_2} \mid [X^2]_{B_2} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

con ello:

$$M = P \cdot A \cdot Q$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} //$$

P2. Sea $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ y $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Suponga que: $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que el núcleo de T_A está generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

a) (1.5 pts.) Dar una base y la dimensión del núcleo de T_A (Indicación: reduzca el generador a una base).

b) (1.5 pts.) Dar una base y la dimensión de $\text{Im}(T_A)$.

c) (1.5 pts.) Indique si T_A es inyectiva y si es sobreyectiva, justifique su respuesta.

d) (1.5 pts.) Encuentre explícitamente la matriz A (Indicación: pruebe que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de \mathbb{R}^3 y calcule las coordenadas de cualquier punto de \mathbb{R}^3 en esta base).

a) Notemos que: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son l.i.,

$$\text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Así:} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

sigue generando
(pues sólo se restó un
elemento l.i. del
generador) y es l.i.

\Rightarrow es base y $\dim(\ker(T_A)) = 2$

b) Por TNI sabemos que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = 2 + \dim(\text{Im}(T_A))$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}(T_A)) = 1.$$

y sabemos por enunciado que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Im}(T_A)$

con ello: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base,

c) • No es inyectiva pues

$$\ker(T_A) \neq \{0\}$$

• No es sobreyectiva pues

$$\dim(\operatorname{Im}(T_A)) = 1 < 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

d)

d) (1.5 pts.) Encuentre explícitamente la matriz A (Indicación: pruebe que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de \mathbb{R}^3 y calcule las coordenadas de cualquier punto de \mathbb{R}^3 en esta base).

En efecto: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i.,
habrá que demostrarlo

y es de tamaño 3, es base de \mathbb{R}^3

Por ello, vamos cómo se escribe los elementos de \mathbb{R}^3 como c.l. de estos vectores, es decir

Encuentra $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \alpha = a$$

$$b = 2a + \beta \Rightarrow \beta = b - 2a$$

$$c = \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = c - b + 2a$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (b - 2a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c - b + 2a) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / A.$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \ker(T_A)} + (b - 2a) \cdot \underbrace{A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \ker(T_A)} + (c - b + 2a) \underbrace{A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (c - b + 2a) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a - b + c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

P3. a) (3 ptos.) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica que $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pruebe que $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ en todo $x, y \in \mathbb{R}$ (Indicación: pruebe que $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es una base de \mathbb{R}^2 y calcule las coordenadas de cualquier punto de \mathbb{R}^2 en esta base).

b) Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

1) (1 pto.) Pruebe que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ (Obs.: $\text{Ker}(T)$ es el núcleo de T).

2) (1 pto.) Pruebe que $\dim(\text{Ker}(T) + \text{Im}(T)) = n$.

3) (1 pto.) Concluir, usando argumentos de dimensionalidad, que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

a) Notemos: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es l.i. de tamaño 2
 \Rightarrow base de \mathbb{R}^2

con ello, podemos descomponer $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ como c.l. de estos 2 vectores:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= \alpha + \beta \\ b &= \alpha - \beta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} a+b &= 2\alpha \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{b-a}{2}$$

con ello:

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\left(\frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y-x}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \overset{+ \text{ lineal}}{\uparrow} = \frac{x+y}{2} T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$+ \frac{y-x}{2} T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{x+y}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{y-x}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x+y)/2 \\ 2(x+y)/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

con lo que se concluye.

b) Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$.

1) (1 pto.) Pruebe que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ (Obs.: $\text{Ker}(T)$ es el núcleo de T).

2) (1 pto.) Pruebe que $\dim(\text{Ker}(T) + \text{Im}(T)) = n$.

3) (1 pto.) Concluir, usando argumentos de dimensionalidad, que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$.

1) En efecto, sea $x \in \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$

esto nos dice:

$$\left. \begin{array}{l} - \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } T(y) = x \\ - T(x) = 0 \end{array} \right\} T(T(y)) = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (T \circ T)(y) = 0 \\ \parallel \\ T(y) \end{array} \right\} y \in \text{Ker}(T)$$

$$\text{con ello: } \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ \parallel \\ T(y) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$$

A su vez $\{0\} \in \text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T)$ pues
Ambos son \mathbb{R}^n 's.

2) se sabe que $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} U = \text{Ker}(T) \\ V = \text{Im}(T) \end{array} \right\} & \Rightarrow \dim(\text{Im}(T) + \text{Ker}(T)) \\ & = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T)) \\ & - \dim(\{0\}) = n \text{ por TNS} \end{aligned}$$

3) $\mathbb{R}^n = \text{Im}(T) \oplus \text{Ker}(T)$.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \dim(\text{Im}(T) + \text{Ker}(T)) = n = \dim(\mathbb{R}^n) \\ \bullet \text{Im}(T) + \text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \right\} = \text{Im}(T) + \text{Ker}(T) = \mathbb{R}^n$$

y por 1) intersección solo en $\{0\} \Rightarrow$ son suma directa.