PAUTA AUX #8 Lineal.

P1 $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ dada por $T(a+bx+cx^2) = (a-b)+(b-c)x+(a+c)x^2$

a) Dem. T lineal.

En efecto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $p_1(x) := a_1 + b_1 x + c_1 x^2$

$p_2(x) := a_2 + b_2 x + c_2 x^2$

PDQ $T(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha T(p_1) + \beta T(p_2)$ en efecto:

Vemos que: $T(p_1) = (a_1-b_1) + (b_1-c_1)x + (a_1+c_1)x^2$

$T(p_2) = (a_2-b_2) + (b_2-c_2)x + (a_2+c_2)x^2$.

$T(\alpha p_1+\beta p_2) = T(\alpha(a_1+b_1x+c_1x^2)+\beta(a_2+b_2x+c_2x^2))$

$= T((\alpha a_1+\beta a_2) + (\alpha b_1+\beta b_2)x + (\alpha c_1+\beta c_2)x^2)$

$:= (\alpha a_1+\beta a_2 - \alpha b_1 - \beta b_2) + (\alpha b_1+\beta b_2 - \alpha c_1 - \beta c_2)x + (\alpha a_1+\beta a_2 + \alpha c_1+\beta c_2)x^2.$

$= \alpha\left[(a_1-b_1) + (b_1-c_1)x + (a_1+c_1)x^2\right]$

$+ \beta\left[(a_2-b_2) + (b_2-c_2)x + (a_2+c_2)x^2\right] = \alpha T(p_1) + \beta T(p_2)$

con lo que T es lineal ■

b) Estudie la imagen de T: concepto clave:

Para encontrar $\mathrm{Im}(T)$ basta aplicar T sobre una base del espacio de partida.

En este caso nos piden usar la base $\{1, x, x^2\}$

Veamos:

- $T(1) = T(1 + 0x + 0x^2) = 1 + 0x + 1x^2 = 1 + x^2$
- $T(x) = T(0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2) = -1 + 1 \cdot x = x - 1$
- $T(x^2) = T(0 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2) = -1 \cdot x + 1 \cdot x^2 = x^2 - x$

Luego, como T es lineal, podemos usar estos 3 para conocer el valor de T en cualquier polinomio, de la sgte manera

$$T(a + bx + cx^2) = aT(1) + bT(x) + cT(x^2)$$

$$= a(1 + x^2) + b(x - 1) + c \cdot (x^2 - x)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(T) = \langle \{x^2 + 1, x - 1, x^2 - x\} \rangle$$

Notemos que este conjunto es l.i. $\rightarrow$ Propuesto: chequear.

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(T) = P_2(\mathbb{R})$$

y se obtiene lo pedido.

$\boxed{P2}$ Sea $T: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ dada por $T(z_1, z_2)' = (iz_1 + z_2, z_1 - iz_2)^T$.

a) Pruebe que T es lineal.

Notemos que

$$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_1 + z_2 \\ z_1 - iz_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

y multiplicar por una matriz siempre es lineal, pues el producto matricial distribuye y respeta al producto escalar.

i.e. $\quad M(\alpha v_1 + \beta v_2) = M\cdot(\alpha v_1) + M(\beta \cdot v_2) = \alpha\cdot(M v_1) + \beta\cdot(M v_2)$

$$\forall M \in M_{n\times m}(\mathbb{K})\ ;\ v_1, v_2 \in \mathbb{K}^m;\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

b) $Ker(T)$. Sea $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in Ker(T)$ esto es:

$$T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \iff \underset{(i)}{iz_1 + z_2 = 0} \ \wedge\ \underset{(ii)}{z_1 - iz_2 = 0}$$

De (ii) $z_1 = iz_2 \xrightarrow[\text{en }(i)]{} i(iz_2) + z_2 = 0$

$\Rightarrow z_2 = z_2 \rightarrow$ no aporta info. $\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iz_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_2\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{Ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle}$.

c) $Im(T)$ usaremos el mismo método que en P_1, con la base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$

$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Im(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ pero $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$ no es l.i.

pues $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $Im(T)$. //

P3 $T: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dado por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b, c-d)$.

a) T lineal. En efecto sean $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

PDQ: $T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$

En efecto:

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1+\beta a_2 & \alpha b_1+\beta b_2 \\ \alpha c_1+\beta c_2 & \alpha d_1+\beta d_2 \end{pmatrix}$$

$$:= (\alpha a_1+\beta a_2 + \alpha b_1+\beta b_2, \alpha c_1+\beta c_2 - \alpha d_1-\beta d_2)$$

$$= \alpha(a_1+b_1, c_1-d_1) + \beta(a_2+b_2, c_2-d_2) = \alpha T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Con ello, T es lineal.

b) $\ker(T)$. Notemos $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \ker(T) \iff T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} a+b \\ c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff b = -a \wedge c = d$$

$$\iff M = \begin{pmatrix} a & -a \\ c & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \ker(T) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Notando que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i. $\to$ Propuesto: Chequear.

$\Rightarrow$ es base de $\ker(T)$ //

P4 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + y + 2z \\ 2y - z \end{pmatrix}.$$

a) T Lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

PDQ: $T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

En efecto.

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ 3(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + 2(\alpha z_1 + \beta z_2) \\ 2(\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\begin{pmatrix} x_1 - 2y_1 \\ 3x_1 + y_1 + 2z_1 \\ 2y_1 - z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 - 2y_2 \\ 3x_2 + y_2 + 2z_2 \\ 2y_2 - z_2 \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad //$$

con lo que T es lineal.

b) $M_{BB}(T)$. Cuando la base dada es B (la "base canónica") este ejercicio es sencillo:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 0 \cdot z \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 2 \cdot z \\ 0 \cdot x + 2 \cdot y + (-1) \cdot z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad //$$

Si la base no fuera B el ejercicio pedido involucra más pasos. (próxima auxiliar).