Pauta Aux. #7 lineal

P1] a) T inyectiva $\Leftrightarrow$ preserva conjuntos l.i.

Usaremos que: $\left[T \text{ inyectiva} \Leftrightarrow Ker(T) = \{0\} \right]$

con ello: sea $v_1, \dots, v_k \in V$ un conjunto l.i., PDQ

$T(v_1), \dots, T(v_k) \in W$ es un conjunto l.i.

En efecto sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tq $\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_k T(v_k) = 0$

Por linealidad de T,

$0 = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_k T(v_k) = T(\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k v_k)$.

$\Leftrightarrow \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \in Ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$

y como $v_1, \dots, v_k$ son l.i., obtenemos que

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ i.e., $T(v_1), \dots, T(v_k)$ es l.i //

b) T inyectiva $\Leftrightarrow \dim(Im(T)) = \dim(V)$.

En efecto:

T inyectiva $\Leftrightarrow Ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow \dim(Ker(T)) = 0$

$\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(Im(T)) + 0$ //

Donde esta última equivalencia es por

T.N.I //

P2 U, V, W ev's. $T: U \to V$. $L: V \to W$ lineales.

a) Pruebe $L \circ T$ es lineal.

En efecto: $L \circ T : U \to W$ es lineal, pues, sean

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in U$. PDQ: $L \circ T(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha L \circ T(u_1) + \beta L \circ T(u_2)$

Esto pues: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in U$ arbitrarios:

$$L \circ T(\alpha u_1 + \beta u_2) = L(T(\alpha u_1 + \beta u_2)) = L(\alpha \underbrace{T(u_1)}_{\in V} + \beta \underbrace{T(u_2)}_{\in V})$$

por linealidad de T. A su vez, puedo usar linealidad de L para ver que:

$$(\dots) = \alpha L(T(u_1)) + \beta L(T(u_2)) := \alpha L \circ T(u_1) + \beta L \circ T(u_2)$$

con lo que probamos lo pedido.

b) Encuentre $\mathrm{Im}(L \circ T)$ y $\mathrm{Ker}(L \circ T)$.

Vemos que:

$$\mathrm{Im}(L \circ T) = L \circ T(U) = L(T(U)) = L(\mathrm{Im}(T))$$

A su vez:

$$\mathrm{Ker}(L \circ T) = \{u \in U : L \circ T(u) = 0\} = \{u \in U : L(T(u)) = 0\}$$

$$= \{u \in U : T(u) \in \mathrm{Ker}(L)\} = T^{-1}(\mathrm{Ker}(L))$$

P1)

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

a) En efecto:

• B es l.i: sean $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ tq

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frown = \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l}\lambda_4 = 0\\ \Rightarrow \lambda_3 = 0\\ \Rightarrow \lambda_2 = 0\\ \Rightarrow \lambda_1 = 0\end{array}$$

• B generan: sea $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. PDQ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \langle B \rangle$.

En efecto, buscamos $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq:

$$\frown \begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_3+\lambda_4\\ \lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l}\lambda_4 = d \quad \text{de la 4ª ec.}\\ \Rightarrow \lambda_3 = c-d\\ \Rightarrow \lambda_2 = b-c\\ \Rightarrow \lambda_1 = a-b\end{array}$$

Con lo que

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + (c-d)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

i.e $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \langle B \rangle$. Luego $\mathbb{R}^4 = \langle B \rangle$

Así, B es base de $\mathbb{R}^4$

b) En efecto, vemos que por enunciado:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq Im(T)$$

y además son l.i. (pues B es un conjunto l.i. y TODO subconjunto de un conjunto l.i. es l.i.)

Luego sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

vemos que al ser $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ un conjunto l.i. que genera V

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V.

Luego $\dim(V) = 2$. y como V es sev de Im(T).

Luego $\dim(Im(T)) \geq \dim(V) = 2$ // (✱)

Por TNI , además

$$\dim(\operatorname{Im}(T)) + \dim(\ker(T)) = 4 \quad (= \dim(\mathbb{R}^4))$$

$\Leftrightarrow 2n + r = 4$

Además, por (*) $n \geq 2$, luego:

$4 = 2n + r \geq 4 + r \Rightarrow r \leq 0$ luego: $r = 0$

Así: $4 = 2n \Rightarrow n = 2$

Con esto: $\dim(Im(T)) = \dim(Ker(T)) = 2$

y como $Im(T) \subseteq Ker(T)$, Al final tenemos que

$Im(T) = Ker(T)$.

Luego, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de Ambos.

Pues por enunciado es un conjunto li contenido en $Im(T)$ y es de tamaño 2, como $\dim(Im(T)) = 2$, debe ser base

c) En efecto si existiera:

$Im(T) = Ker(T) \Rightarrow \dim(Im(T)) = \dim(Ker(T))$

Llamemos "d" a esta dimensión. Por TNI:

$\dim(Im(T)) + \dim(Ker(T)) = 3$

$\Leftrightarrow d + d = 3 \Leftrightarrow 2d = 3$ pero $d \in \mathbb{N}$ pues es una dimensión

Luego, tal T no existe

$\Rightarrow\Leftarrow$

P4 $L: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (b+c)x^3 - ax^2 + (5d-2a)x + (c+b-d).$$

a) Pruebe que L es lineal. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

PDQ: $L\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \alpha L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

En efecto:

$$L\left(\alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \alpha a+\beta e & \alpha b+\beta f \\ \alpha c+\beta g & \alpha d+\beta h \end{pmatrix}$$

$$:= (\alpha b+\beta f + \alpha c+\beta g)x^3 - (\alpha a+\beta e)x^2 + (5(\alpha d+\beta h) - 2(\alpha a+\beta e))x$$

$$+ ((\alpha c+\beta g) + (\alpha b+\beta f) - (\alpha d+\beta h))$$

$$= \alpha\left[(b+c)x^3 - ax^2 + (5d-2a)x + (c+b-d)\right]$$

$$+ \beta\left[(f+g)x^3 - ex^2 + (5h-2e)x + (g+f-h)\right]$$

$$=: \alpha L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta L\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$ con lo que probamos

Lo pedido.

b) base y dim de ker(L).

Recordemos:

$$\ker(L) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} : \underbrace{L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0}_{(\star)} \right\}$$

Como siempre hacemos, estudiamos el significado "algebraico" de $(\star)$.

$$L\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \iff (b+c)x^3 - ax^2 + (5d-2a)x + c+b-d = 0 \in$$

Esto es, por def. de igualdad de polinomios:

$$\underset{(i)}{b+c=0} \; ; \; \underset{(ii)}{-a=0 \Rightarrow a=0} \; ; \; \underset{(iii)}{5d-2a=0} \; ; \; \underset{(iv)}{b+c-d=0}$$

Si reemplazamos (ii) en (iii) $\Rightarrow$: $d=0$

Con esto en (iv): $b+c=0$ que es (i).

Es decir, $[c=-b \; ; \; a=0 \; ; \; d=0]$ son las condiciones que definen ker(L).

Con ello una base sería $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim(\ker(L)) = 1$

Propuesto: chequear esto.

c) Base y dim de $Im(L)$.

Estudiemos $Im(L)$:

$Im(L) = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) \ t_q \ p = L(M) \text{ con } M \in M_{2x2}(\mathbb{R}) \}$

esto es:

$\exists a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tq $p(x) = (b+c)x^3 - ax^2 + (5d-2a)x + c+b-d$

$\Leftrightarrow \quad p(x) = a(-x^2-2x) + b(x^3+1) + c(x^3+1) + d(5x-1)$

con esto un candidato a base sería

$\{-x^2-2x, \underbrace{x^3+1, x^3+1}_{\text{son iguales}}, 5x-1\}$ $\Rightarrow$ el cjto no es l.i. $\Rightarrow$ no es base.

$\Rightarrow \{-x^2-2x, x^3+1, 5x+1\}$ es candidato a base.

- Sabemos que genera, y es l.i. $\rightarrow$ propuesto.

Aparte, por TNI: $\dim(Im(L)) = \dim(M_{2x2}) - \dim(ker(L))$

$= 4-1 = 3 = |\{-x^2-2x; x^3+1; 5x-1\}|$

con lo que queda absolutamente claro que el conjunto es base

esta parte no es necesaria para la demostración, es más bien para "asegurarse"/corroborar que tiene sentido

d) ¿es L inyectiva y/o sobreyectiva?

- $Ker(L) \neq \{0\} \Rightarrow L$ no inyectiva

- $\dim(Im(L)) = 3 \neq 4 = \dim(P_3(\mathbb{R}))$.

$\Rightarrow Im(L) \neq P_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow L$ no es sobreyectiva.