MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 7: Transformaciones lineales.

10 de mayo de 2024

P1. **[Propuesto] Entendamos qué sucede realmente.** Sean V, W espacios vectoriales, con $\dim(V) = n$, y $T : V \to W$ una transformación lineal. Muestre que:

a) T inyectiva $\iff$ preserva conjuntos l.i.

b) T es inyectiva $\iff dim(Im(T)) = dim(V)$

P2. Canónica. Sean U, V, W espacios vectoriales reales. Sean $T : U \to V$ y $L : V \to W$ transformaciones lineales.

a) Pruebe que $L \circ T$ es una transformación lineal.

b) Encuentre $\text{Im}(L \circ T)$ y $\text{Ker}(L \circ T)$ en función de T y L, y sus núcleos e imágenes.

P3. Te ene i Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$, y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

a) **[Propuesto]** Demuestre que B es base de $\mathbb{R}^4$.

b) Argumente que $dim(Im(T)) \geq 2$. Suponiendo además que $Im(T) \subseteq ker(T)$, calcule las dimensiones de $ker(T)$ y $Im(T)$. Dé bases de la imagen y del núcleo de la transformación T.

c) Demuestre que no existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = ker(T)$.

P4. Cositas Considere la siguiente función $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$

$$L\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = (b+c)x^3 - ax^2 + (5d - 2a)x + c + b - d$$

a) Muestre que L es lineal.

b) Encuentre $ker(L)$, una base el mismo, y su dimensión.

c) Encuentre $Im(L)$, una base el mismo, y su dimensión.

d) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de L.