

Parte A: #6 lineal

P1 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $H := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Para $\forall a, b \in \mathbb{R}$. $(I + aH)(I + bH) = I + (a + b + 2ab)H$.

En efecto, sean $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Vemos que

$$(I + aH)(I + bH) = I + bH + aH + abH^2.$$

No tenemos que sólo faltaba que $H^2 = 2H$ para obtener lo pedido.

$$\begin{aligned} \text{En efecto } H^2 &= H \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2H \end{aligned}$$

con ello: $(I + aH)(I + bH) = I + aH + bH + 2abH$

$$= I + (a + b + 2ab)H \quad \text{con lo que probamos lo pedido}$$

b) sea $A = (I + aH)$ estudiar invertibilidad de A según a .

Vemos la ecuación de a . Si $[(2ab + a + b) = 0]$ entonces se obtiene que $I + bH$ es la inversa de A por definición. Con ello, esto es:

$$\left[b = \frac{-a}{1+2a} \right]$$

¡Ojo! caso problemático $2a+1 = 0$
i.e. $a = -\frac{1}{2}$.

Estudiamos ese caso aparte: si $a = -1/2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Escalamando:

$$\xrightarrow{E_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ no es invertible si } a = -1/2$$

Luego $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2\} \Leftrightarrow A$ es invertible y en ese caso:

$$\left[A^{-1} = I - \frac{a}{1+2a} \cdot H \right]$$

P2] $\forall u, v, w \in V$. $u = 2v - w$. $W := \langle \{u, v, w\} \rangle$.
PDA $\dim(W) < 3$.

En efecto, esto es cierto pues:

- W es generado por $\{u, v, w\}$, que tiene 3 elementos
- Con ello $\exists B \subseteq \{u, v, w\}$ base de W .
recordar $[|B| = \dim(W)]$
- como u es combinación lineal de v, w , tenemos que $\{u, v, w\}$ es l.d, luego
 $B \neq \{u, v, w\}$ pues las bases son l.i.
con ello $\dim(W) = |B| < |\{u, v, w\}| = 3$

y Así se concluye lo pedido.

Propuesto: encuentre una demostración alternativa de este resultado usando la fórmula

$$[\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)]$$

con algunas U, W convenientes

P3 $U = \{ M \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \}$

a) $U \neq \emptyset$. En particular podemos probar que es
 subespacio de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, lo cual implicaría que es s.e.s.
 Para esto, podemos usar caracterización compacta.

1) $U \neq \emptyset$ en efecto $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$ pues.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

2) Sean $M, N \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$ p.d.f. $\lambda M + N \in U$.

En efecto:

$$(\lambda M + N) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\lambda M + N] \quad \checkmark$$

$\hookrightarrow M, N \in U$.

con ello, notando además que, claramente, $U \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$
 obtenemos que es s.e.s.

b) Base y dim. de U .

Como siempre, comenzamos estudiando las ecuaciones que definen U : sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U$.

$$M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

con ello, si $M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M$:

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

O bien:

i)	$a = a+c$	$\rightarrow$	$c = 0$
ii)	$a+b = b+d$	$\rightarrow$	$a = d$
iii)	$c = c$	$\rightarrow$	libre
iv)	$c+d = d$	$\rightarrow$	$c = 0$

$\Rightarrow a = d$ y $c = 0$. Reescribimos M con la nueva info:

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{y renombramos por letra:}$$

$$\Rightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Postulamos } B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

como base. Propuesto: chequear que es base, i.e., genera y es l.i.

$$\Rightarrow \dim(U) = 2 = |B|.$$

c) Z sea de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ $\nexists$ $Z \oplus U = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. $\dim(Z)$?

Sabemos que:

- $\dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R})) = 4$

- $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

- $Z \oplus U = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow Z \cap U = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$

Con todo esto:

$$\underbrace{\dim(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}))}_{4''} = \dim(Z+U) = \underbrace{\dim(Z)}_2 + \underbrace{\dim(U)}_{2 \text{ por a)}} - \underbrace{\dim(Z \cap U)}_{0 \text{ por suma directa}}$$

$$\Rightarrow \dim(Z) = 4 - 2 = 2$$

d) Sea $V := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V$?

Debemos chequear 2 cosas:

1) $U+V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

2) $U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Equivalentemente, podemos chequear si

B es l.i. con el generador de V .
(por que?)

i.e. ver que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es l.i.}$$

En efecto:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$
cumplen:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{esto es:}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$