MA1102 Álgebra lineal
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 6: Un poco de esto, un poco de aquello

22 de abril de 2024

P1. Tutti-frutti. Sea $\mathbf{I}$ la matriz identidad de 2×2 y $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Muestre que para $a, b \in \mathbb{R}$ cualquiera se tiene que:

$$(\mathbf{I} + aH)(\mathbf{I} + bH) = \mathbf{I} + (a + b + 2ab)H$$

b) Considere $A := \mathbf{I} + aH$. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ que hacen a A invertible, y calcule su inversa en función de $\mathbf{I}, a, H$.

P2. Fundamental. Sea V un e.v., $u, v, w \in V$ tales que $u = 2v - w$. Definimos $W := \langle \{u, v, w\} \rangle$, muestre que $dim(W) < 3$.

P3. A sumar. Considere $U := \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \quad M \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \right\}$.

a) Pruebe que U es un e.v.

b) Dé una base de U y calcule su dimensión.

c) Sea Z s.e.v de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $U \oplus Z = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. ¿Cuál es la dimensión de Z?

d) Considere $V := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$. ¿$U \oplus V = \mathcal{M}_{2\times 2}$?