Pauta Aux #3 Lineal.

P1)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + \alpha x_4 &= \beta. \end{aligned}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parámetros.

a) Sist. sin solución.

Primero debemos plantear el sistema matricialmente y escalonar.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[E_{12}(-1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{E_{23}(1) \\ E_{24}(1)}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha-3 & \beta+1 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{34}(-1)]{} \boxed{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta-1 \end{array}\right)}$$

Recordemos que un sistema no tiene solución cuando queda alguna ecuación del estilo $[0 \cdot x \neq 0]$

En este caso, esto sólo puede darse en la ecuación iv (4ª fila):

$$iv - \quad \alpha \cdot x_4 = \beta - 1$$

Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 1$ obtenemos $0 = \beta - 1 \neq 0$

$$\Rightarrow [\alpha = 0 \,;\, \beta \neq 1 \Rightarrow \text{no hay solución}]$$

b) infinitas soluciones.

Recordemos que este caso se da cuando tenemos una ecuación del estilo

$$\left[0 \cdot x = 0 \right]$$

Nuevamente esto se ve estudiando la ecuación iv.-

iv.- $\alpha x_4 = \beta - 1$ Si $\alpha = 0$; $\beta = 1$

queda

iv.- $0 \cdot x_4 = 0$ es decir:

$$\left[\alpha = 0 \wedge \beta = 1 \Rightarrow \text{infinitas soluciones} \right]$$

c) Solución única.

Recordemos que la solución única ocurre cuando el escalonado es perfecto, es decir, no hay ceros en la diagonal. Esto pasa cuando $\alpha \neq 0$.

Es decir:

$$\left[\alpha \neq 0 \Rightarrow \text{solución única} \right]$$

d) Lado izquierdo invertible.

Una matriz es invertible si y sólo si al escalonarla el escalonado queda perfecto.

Es decir, nuevamente la condición es $\boxed{\alpha \neq 0}$

P3] Se dice que A, B cuadradas conmutan cuando cumplen $\boxed{AB = BA}\ (\bullet)$

Sean A, B tales que conmutan.

a) Pruebe que A^T, B^T conmutan.

En efecto, vemos que, si A, B arbitrarias conmutan, entonces:

$$A^T B^T = (BA)^T \overset{(\bullet)}{=} (AB)^T = B^T A^T$$

Con lo que A^T, B^T conmutan.

b) Pruebe que A^2, B^2 conmutan.

En efecto, si A, B arbitrarias conmutan, entonces:

$$A^2B^2 \overset{(\star)}{=} A(AB)B \overset{(\bullet)}{=} A(BA)B \overset{(\star)}{=} (AB)(AB) \overset{(\bullet)}{=} (BA)(BA)$$
$$\overset{(\star)}{=} B(AB)A \overset{(\bullet)}{=} BBAA := B^2A^2$$

Con lo que A^2, B^2 conmutan, donde se usó que el producto matricial asocia. $(\star)$

c) Pruebe que si A es invertible, A^{-1} y B conmutan.

En efecto sean A, B arbitrarias tales que conmutan y A es invertible. Vemos que:

$$A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot B \cdot I = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot A^{-1}$$
$$\overset{(\star)}{=} A^{-1}(BA)A^{-1} \overset{(\bullet)}{=} A^{-1}(AB)A^{-1} \overset{(\star)}{=} (A^{-1}A) B \cdot A^{-1}$$
$$= I \cdot B \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

P4 Ya que para chequear invertibilidad necesitamos escalonar A y luego para invertirla (de poder) debemos escalonar (A|I), comenzamos con (A|I) directamente para ahorrar tiempo.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & -4/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 4/3 & 4/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/9 & -4/3 & 1/3 & -1/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/9 & 4/3 & -1/3 & -2/9 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/9 & -4/3 & 1/3 & -1/9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora "colocamos" unos en la diagonal para que sea más fácil pivotar hacia arriba:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2/3 & -4/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -3/2 & 1/2 & -9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

Ahora, escalonamos hacia arriba:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2/3 & -4/3 & 0 & 1/4 & 0 & -1/6 & 1/12 \\ 0 & 1 & 8/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -13/6 & -\frac{23}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 \end{array}\right)$$