Pauta Aux #4 Lineal.

P1 $p_1(x) := 1+6x^2$; $p_2(x) := 4x$ $\quad p_3(x) := 5x^2$.

PDQ $\mathcal{P}_2(x) = \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$. Usaremos doble inclusión.

$\boxed{\supseteq}$ Directo, pues $\langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$ (el espacio vectorial generado por $\{p_1; p_2, p_3\}$) corresponde al espacio vectorial más pequeño que contiene a p_1, p_2, p_3.

Por lo tanto a su vez, como $\mathcal{P}_2(x)$ es también un espacio vectorial que contiene a p_1, p_2, p_3, debe ser más grande que su generado.

(prop. 2.2. Apunte).

$\boxed{\subseteq}$ Queremos ver que cualquier polinomio de grado ≤ 2 se puede escribir como

$$\left[\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 \right] \rightarrow$$ los elementos de $\langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$ son las combinaciones lineales entre p_1, p_2 y p_3.

Entonces, en efecto, da $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por $p(x) = a + bx + cx^2$.

Notemos las siguientes ideas:

i.- p_2 es el único polinomio que tiene un término de grado 1

ii.- p_1 es el único polinomio que tiene un término de grado 0.

con esto, buscamos encontrar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq

$\forall x \quad \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = a + bx + cx^2$

$\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_1 \cdot 6x^2 + \lambda_2 \cdot 4 \cdot x + \lambda_3 \cdot 5 \cdot x^2 = a + bx + cx^2$.

Esto es, ordenando términos de grados iguales.

$$\underline{\lambda_1} + \underline{\lambda_2 \cdot 4 \cdot x} + \underline{x^2 \cdot (6\lambda_1 + 5\lambda_3)} = \underline{a} + \underline{b \cdot x} + \underline{c \cdot x^2}$$

$\Rightarrow$
$\lambda_1 = a$
$4\lambda_2 = b \longrightarrow \lambda_2 = b/4$
$6\lambda_1 + 5\lambda_3 = c$

$\longrightarrow \lambda_3 = \dfrac{c - 6a}{5}$

$\Rightarrow$ encontramos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = a + bx + c$

$\Leftrightarrow a + bx + c \in \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$.

$\Leftrightarrow P_2(\mathbb{R}) \subseteq \langle \{p_1, p_2, p_3\} \rangle$

con ello se concluye lo pedido.

Pauta Auxiliar #3

P1 a) Tenemos $AMB = 0 \in \mathbb{R}$ i.e.

$A \in M_{1\times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})$

Es decir $A = (a_1 \ \ a_2)$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Veamos que U es sev de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

i.- $U \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ directo por la def de U, pues todos sus elementos se definen como elementos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

ii.- $U \neq \phi$. En efecto la matriz $\vec{0}$ pertenece al conjunto U pues

$$(a_1 \ \ a_2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1 \ \ a_2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0+0 = 0$$

iii.- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \in U$ veamos

$\lambda M_1 + M_2 \in U$ En efecto:

$$A(\lambda M_1 + M_2)B = A(\lambda M_1 B + M_2 B)$$

$$= \lambda A M_1 B + A M_2 B = \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \quad //$$

Con ello por caracterización compacta de sev. se obtiene lo pedido

b) Si $A = (-1 \ -1)$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos que

$$AMB = 0 \iff (-1 \ \ 1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff (-1 \ -1)\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \iff -a-b-c-d = 0$$

$\rightarrow$ sistema de 1 ec. 4 incógnitas $\Rightarrow$ infinitas soluciones

$$\iff d = -a-b-c \iff \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} \right\} = U$$

Ahora, construyamos la base (básicamente es separar lo que tiene la misma letra)

Sea $M \in U$. $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ tq

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Proponemos como base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} = $ "H"

Demostremos que H es efectivamente una base del e.v. U. Esto es:

i) Ver que H genera y es l.i.

Ya vimos que genera, resta ver que es l.i.

En efecto: sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tq

$$\lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La igualdad en las componentes $(1,1)$ $(1,2)$ y $(2,1)$ nos dice

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y con ello H es l.i. y genera, i.e., es base

Con eso probamos lo pedido.

Finalmente, como U tiene una base de cardinal 3, se dice que U es de dimensión 3 ■

Pe a) Ocuparemos doble implicancia.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea el caso $u=0$ PDQ W es sev.

Ocuparemos caract. compacta.

i.- $W \subseteq M_{m,n}(\mathbb{R})$ directo por def.

ii.- $\vec{0} \in W$ sí, pues

$W = \{ M \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : M \cdot v = \vec{0} \}$

y claramente $M = 0 \Rightarrow M \cdot v = 0$

i.e. $0 \in W$, luego, $W \neq \emptyset$

iii.- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_1, M_2 \in W$.

PDQ $\lambda M_1 + M_2 \in W$. En efecto vemos que:

$(\lambda M_1 + M_2) v = \lambda M_1 v + M_2 v = \lambda \cdot 0 + 0 = 0$.

Es decir $\lambda M_1 + M_2 \in W$ //

Con eso tenemos la implicancia.

$\boxed{\Rightarrow}$ Usamos contrarrecíproca, es decir, queremos probar:

$u \neq 0 \Rightarrow W$ no es e.v.,

En efecto, notemos que el paso ii de la dem de $\boxed{\Leftarrow}$ no funciona si $u \neq 0$.

Esto es, siendo precisos, que

$u \neq 0 \Rightarrow 0 \notin W \Rightarrow W$ no es sev.

Con lo que obtenemos la otra implicancia.

Así, se demuestra lo pedido.

b) Por a) el ninA YA está demostrado, i.e. el conjunto es ev, por lo que tiene base, veamos que es un singleton.
Solucionemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{13}(-3)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ infinitas soluciones.

$\Rightarrow$ $x = -2y$, esto es:

$$\vec{x} \in \{\vec{x} \mid A\vec{x} = 0\} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $W = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un generador del espacio.

Así probamos lo pedido.