Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-2 Álgebra Lineal
29 de mayo de 2024

Auxiliar 9: Más Transformaciones Lineales y Matriz Representante

Profesor: Natacha Astromujoff A.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Javiera Gutierrez R.

P1. Sea una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

a) Encuentre una expresión explícita de T.

b) Determine el $\operatorname{Ker} T$ y calcule su dimensión.

c) Determine la $\operatorname{Im} T$ y calcule su dimensión.

d) Estudie la inyectividad y epiyectividad de la transformación.

e) Determine la matriz representante de la transformación respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ en la llegada y en la partida.

f) Sean

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \beta' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Calcule la matriz representante de T respecto a la base β en la partida y β' en la llegada por medio del cambio de base.

P2. Sea $T : \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a-b\\c-d\\a-b+c-d\end{pmatrix}$$

a) Demuestre que T es lineal.

b) Determina una base y calcule la dimensión del $\operatorname{Ker}(T)$.

c) Determina una base y calcule la dimensión de la $\operatorname{Im}(T)$.

d) Estudie la inyectividad y la epiyectividad de la transformación.

e) Calcule la matriz representante de T respecto a las bases canónicas.

f) Calcule la matriz representante de T respecto a la base α en la partida y β en la llegada, definidas respectivamente como:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \right\} \qquad \beta = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

usando matrices de cambio de base (diagrama cuadrado).

P3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ y $S : V \to V$ dos transformaciones lineales, tales que $T \circ T = S \circ S = 0$ y $T \circ S + S \circ T = I$.

a) Pruebe que $Ker(T) = Im(T)$ y que $Ker(S) = Im(S)$.

b) Pruebe que $dim(Im(T)) = dim(Im(S))$.