Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102-2 Álgebra Lineal
25 de abril de 2024

# Auxiliar 6: Repaso Control 1

**Profesor:** Natacha Astromujoff A.
**Auxiliar:** Luis Fuentes C. y Javiera Gutierrez R.

**P1.** Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 &= 1 \\ \alpha x_1 + (\alpha+4)x_2 + 3\alpha x_3 &= -2 \\ -\alpha x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ (\alpha+2)x_2 + (3\alpha+1)x_3 &= \beta \end{aligned}$$

donde $x_1, x_2, x_3$ son las incógnitas y $\alpha, \beta$ son los parámetros. Escriba el sistema en forma matricial y para cada valor real de $\alpha, \beta$ decida si el sistema:

*a)* Tiene solución única.

*b)* No tiene solución.

*c)* Tiene infinitas soluciones.

**P2.** En el siguiente problema $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ denota al espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 4. Considere $V = \{p \in \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) : p(2) = p'(1) = 0\}$.

*a)* Demuestre que $V$ es subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

*b)* Encuentre una base de $V$ y su dimensión.

*c)* Extienda la base anterior a una base de $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$.

*d)* Considere ahora $W = \{p \in \mathbb{P}_4(\mathbb{R}) : p''(0) = p'''(\frac{1}{4}) = 0\}$.

1) Encuentre una base y la dimensión de $W$.

2) Encuentre una base de $V \cap W$ y su dimensión.

3) Encuentre la dimensión de $V + W$, y diga si está o no en suma directa.

**P3.** *a)* Una matriz $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se llama idempotente si $M^2 = M$. Si $C, D \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con tales que $C = CD$ y $D = DC$, demuestre que $C$ y $D$ son idempotentes.

*b)* Demuestre que si $A, B$ y $(A + B^{-1})$ son matrices invertibles, entonces $(A^{-1} + B)$ también es ivertible y su inversa es $A(A + B^{-1})^{-1}B^{-1}$.

*c)* Considere las matrices $P, Q \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ tales que $P^2 = P$ y $Q = I - P$. Demuestre que $Q^3 = Q$. Si $P$ es invertible, use las condiciones dadas en este punto para probar que $P = I$ y $Q = 0$.