Pauta RP 315

1. Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ dado por $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Encuentre a, b y c si se sabe que 1 y $1+i$ son raíces de P.

Sol: Puesto que $P \in \mathbb{R}[x]$ y $1+i$ es una raíz de P

$\Rightarrow 1-i$ es raíz de P

Por lo tanto

$$P(x) = (x-1)(x-(1+i))(x-(1-i))$$

$$= (x-1)(x^2-2x+2)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

luego, $\underline{a = -3 \;,\; b = 4 \;,\; c = -2}$

2. ¿Cuáles son los posibles grados del resto de la división de $x^{2023} - 2x + 3$ por $x^2 - 1$?. Encuentre explícitamente tal resto.

Sol: Si dividimos $P(x) = x^{2023} - 2x + 3$ por x^2-1 y nos de el polinomio $Q(x)$ con resto $R(x)$ quiere decir,

$$P(x) = Q(x)(x^2-1) + (\underbrace{ax+b}_{R(x)})$$

luego, vemos que evaluando en $x=1 \wedge x=-1$

$$P(1) = a + b = 1^{2023} - 2 + 3 = 2$$
$$P(-1) = -a + b = (-1)^{2023} + 2 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ -a+b = 4 \end{cases} \Rightarrow \underline{a = -1 \;,\; b = 3}$$

Por lo tanto el resto de la división es $\underline{R(x) = 3 - x}$

3. Factoricen el polinomio $z^6 + 1$ en $\mathbb{C}[x]$ y en $\mathbb{R}[x]$.

Sol: Buscamos las raíces de z^6+1, esto es ver los z tal que

$$z^6 = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad z^6 = e^{i(-\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = e^{i(-\pi/6 + k\pi/3)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = e^{i(-\pi/6 + k\pi/3)}, \quad k \in \{0,1,\dots,5\}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \underbrace{e^{-i\pi/6}, e^{i\pi/6}}_{\text{conjugados}}, \underbrace{e^{i\pi/2}}_{i}, \underbrace{e^{i5\pi/6}, e^{i7/6\pi}}_{\text{conjugados}}, \underbrace{e^{i\frac{3\pi}{2}}}_{-i}$$

luego, viendo

$$e^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i\,\text{sen}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad e^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$e^{i\underbrace{5\pi/6}_{\pi-\pi/6}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\Rightarrow \quad e^{7\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Tenemos en $\mathbb{C}[x]$

$$z^6+1 = (z-i)(z+i)\left(z-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)$$

Por otro lado,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sea } ax^2+bx+c=0 \\ \Rightarrow x_1+x_2=-b/a \,,\ x_1x_2=c/a\end{array}} \ \star$$

$$\underbrace{(z-i)(z+i)}_{(z^2+1)\ \star}\underbrace{\left(z-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)}_{z^2-\sqrt{3}z+1\ \star}\underbrace{\left(z-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right)\left(z+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right)}_{z^2+\sqrt{3}z+1\ \star}$$

Finalmente, en $\mathbb{R}[x]$

$$\underline{z^6+1 = (z^2+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)(z^2+\sqrt{3}z+1)}$$