Pauta RP S10

Control 2 MA1101

- P1 RP → P3 a)
- P4 RP → P3 b)

P3. *a*) (3 ptos.) Para $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sea $J_i = \{1, 2, \ldots, i\}$. Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Muestre que

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} (\{i\} \times (J_{i!} \setminus J_{(i-1)!})) \right| = n! - 1.$$

Solución

Para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j, \{i\} \times (J_{i!} \setminus J_{(i-1)!})$ y $\{j\} \times (J_{j!} \setminus J_{(j-1)!})$ son disjuntos. Entonces, $|\bigcup_{i=1}^{n} (\{i\} \times (J_{i!} \setminus J_{(i-1)!}))| = \sum_{i=1}^{n} |\{i\} \times J_{i!} \setminus J_{(i-1)!}|$

.....**0.6 pts.**

Cardinal de un producto cartesiano:

$|\{i\} \times (J_{i!} \setminus J_{(i-1)!})| = |\{i\}||J_{i!} \setminus J_{(i-1)!}| = |J_{i!} \setminus J_{(i-1)!}|$ .....**0.6 pts.**

Cardinal de una diferencia y $J_{(i-1)!} \subseteq J_{i!} \Rightarrow |J_{i!} \setminus J_{(i-1)!}| = |J_{i!}| - |J_{(i-1)!}|$

.....**0.6 pts.**

.....Cardinal del conjunto $J_k = \{1, \ldots, k\} \Rightarrow |J_{i!}| - |J_{(i-1)!}| = i! - (i-1)!$.

.....**0.6 pts.**

Calculo final usando propiedad telescópica

$|\bigcup_{i=1}^{n} (\{i\} \times (J_{i!} \setminus J_{(i-1)!}))| = \sum_{i=1}^{n} (i! - (i-1)!) = n! - 1.$ .....**0.6 pts.**

b) (3.0 ptos.) Use el teorema del binomio y la igualdad

$$\binom{m}{k}\binom{m-k}{j} = \binom{m}{j}\binom{m-j}{k},$$

válida para $0 \leq j, k \leq m$, para demostrar que

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{i=0}^{n} n!(-2)^i \binom{2n}{n-i}\binom{n+i}{n} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Solución

Usando la igualdad para $m = 2n$, $k = n - i$ y $j = n$ se tiene que

$$\binom{2n}{n-i}\binom{n+i}{n} = \binom{2n}{n-i}\binom{2n-(n-i)}{n} = \binom{2n}{n}\binom{2n-n}{n-i}.$$ .....**0.7pts.**

Aplicando lo anterior a la suma: $\dfrac{1}{(2n)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} n!(-2)^i\binom{2n}{n-i}\binom{n+i}{n}$

$$= \frac{1}{(2n)!}\sum_{i=0}^{n} n!(-2)^i\binom{2n}{n}\binom{n}{n-i}$$

$$= \frac{n!}{(2n)!}\frac{(2n)!}{n!n!}\sum_{i=0}^{n}(-2)^i\binom{n}{n-i}$$ .....**0.8pts.**

Usando el Teorema del Binomio: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-2)^i\binom{n}{n-i} = (1-2)^n$ .....**1.0pts.**

Se concluye: $\dfrac{1}{(2n)!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n} n!(-2)^i\binom{2n}{n-i}\binom{n+i}{n} = \dfrac{1}{n!}(-1)^n$ .....**0.5 pts.**

Pauta BP S10 P2 y P3

2. Muestre que la función $\varphi : \{0,1\}^4 \longrightarrow \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ dada por

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = \{i \,|\, a_i = 1\},$$

es biyectiva (por definición o encontrando la inversa y componiendo). Use lo anterior para concluir que $|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})| = 2^4$ y calcule $|A|$, donde

$$A = \{X \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \,|\, 1 \in X\}.$$

Nota: Queda propuesto resolverlo por definición, se encuentra una inversa

Dem: Consideramos $\Psi : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \longrightarrow \{0,1\}^4$

$$C \longrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

tal que $x_i = 1 \iff i \in C$.

Luego, notamos que $\Psi \circ \varphi : \{0,1\}^4 \longrightarrow \{0,1\}^4$ es tal que

$$\Psi \circ \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Psi(\underbrace{\{i : x_i = 1\}}_{C}) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\Rightarrow \Psi \circ \varphi = Id_{\{0,1\}^4}$$

Por otro lado, $\varphi \circ \Psi : \mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \longrightarrow \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ es tal que para $C \in \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$

$$\varphi \circ \Psi(C) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

donde $x_i = 1 \iff i \in C$, luego,

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{i \,|\, x_i = 1\} = C$$

$$\varphi \circ \Psi = Id_{\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})}$$

Por lo tanto, $\varphi^{-1} = \Psi$ y entonces φ es biyectiva, luego

$$|\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})| = |\{0,1\}^4| = |\{0,1\}|^4 = 2^4$$

Calculemos $|A|$, consideremos $\varphi : \{0,1\}^3 \longrightarrow A$ definido por $\varphi(x_2, x_3, x_4) = \{1\} \cup \{i : x_i = 1\} \in A$.

Veamos que tiene la misma estructura anterior, realizando una demostración análoga se deduce que φ es biyección

$$\Rightarrow |A| = |\{0,1\}^3| = 2^3$$

3. Calcule las siguientes sumatorias en función de n:

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k \log(1 + \frac{1}{k})$.

(c) Para p, q tales que $p + q = 1$, $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$

Fracciones Parciales : Supongamos que

$$\frac{1}{(3k-1)} = \frac{A}{(3k-1)} + \frac{B}{(3k+2)} = \frac{(3k+2)A + (3k-1)B}{(3k-1)(3k+2)}$$

$$\Rightarrow (3k+2)A + (3k-1)B = 1$$

$$\Rightarrow 3k\underbrace{(A+B)}_{=0} + \underbrace{2A - B}_{=1} = 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} \quad B = -\frac{1}{3}$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{(3k-1)}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{(3k+2)}}_{a_{k+1}}$$

$\hookrightarrow \left(\frac{1}{3(k+1)-1} = \frac{1}{3k+2}\right)$

Prop telescópica $= \frac{1}{3}\left(a_1 - a_{n+1}\right)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3n}{6n+4}\right)$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\ln(k+1) - k\ln(k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\ln(k+1) - k\ln(k) + \ln(k+1) - \ln(k+1) \quad \text{(NIKITA NIPONE)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k+1)\ln(k+1)}_{a_{k+1}} - \underbrace{k\ln(k)}_{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)$$

Prop. Telescópica

$$= (n+1)\ln(n+1) - \cancel{\ln(1)}^{0} - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right)$$

$$= (n+1)\ln(n+1) - \ln((n+1)!)$$

(c) Tenemos $p+q=1$, veamos $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$

Lema: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

Dem: Veamos que

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Veamos ahora $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, notemos que

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

Luego usando el lema

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$

Desarrollando,

$$n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} p\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} \quad \text{(Nikito Nipone)}$$

$$= np\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k q^{(n-1)-k}$$

Binomio de Newton

$$= np\,(\underbrace{p+q}_{=1})^{n-1}$$

Puesto que $p+q=1$ concluimos que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = np}$$