Pauta RP S9

1. Para $k \in \mathbb{N}$, considere $A_k = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b = k\}$.

   (a) Entienda el conjunto A_k considerando un k en particular y considerando algunos elementos en A_k y/o graficando el conjunto en un plano cartesiano.

   (b) Demuestre que la función $f : A_k \to \{0, 1, ..., k\}$ dada por $f(a,b) = a$ es una biyección y conluya que $|A_k| = k+1$.

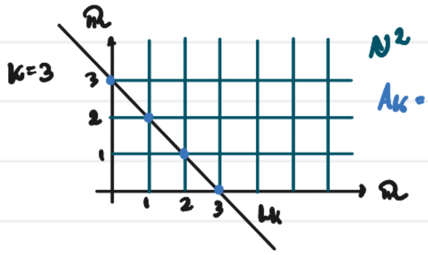
   (c) Calcule la cardinalidad del conjunto $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a+b+c = 50\}$. Para esto:

   - Escriba S como la unión de conjuntos S_i, $i = 0, ..., 50$, cuyos elementos son los elementos de S que tienen la tercera coordenada fija igual a i.
   - Calcule la cardinalidad de S_i usando la parte (a).
   - Use los dos incisos anteriores para concluir.

(a) Propuesto el ejemplo con A_K

En general se puede pensar en A_K como $L_K \cap \mathbb{N}^2$ donde $L_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = K\}$ es una recta de pendiente $m = -1$ que pasa por $(0,K)$

Ej:



(b) Sea $f_K : A_K \to \{0, \dots, K\}$ dada por $f_K(a,b) = a$, veamos que es biyectiva

Inyectividad: Supongamos $f((a_1,b_1)) = f((a_2,b_2))$, esto es $a_1 = a_2$, como $(a_1,b_1), (a_2,b_2) \in A_K \Rightarrow b_1 = K - a_1$.
Puesto que $a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 = K - a_1 = K - a_2 = b_2$

$$\Rightarrow (a_1,b_1) = (a_2,b_2)$$

Sobreyectiva: Veamos que $\forall n \in \{0, \dots, K\}\ \exists (a,b) \in A_K$ tal que $f((a,b)) = n$.
En efecto, $\forall n \in \{0, \dots, K\}$ existe $(n, n-K) \in A_K$ y satisface lo anterior.

Luego f_K es biyectiva $\Rightarrow |A_K| = |\{0, \dots, K\}| = K+1$

(c) Consideramos $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a+b+c = 80\}$.

Escribimos S como la unión disjunta $S = \bigodot_{i=0}^{80} S_i$ donde

$S_i := \{(a,b,c) \in S : c = i\} \iff S_i = \{(a,b,i) \in \mathbb{N}^3 : a+b+i = 80\}$

$\iff S_i = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 : a+b = 80-i\}$

Usando las partes anteriores, $|S_i| = 80 - i + 1 = 81 - i$

Luego, $|S| = \left|\bigodot_{i=0}^{80} S_i\right| = \sum_{i=0}^{80} |S_i| = \sum_{i=0}^{80} 81 - i$

$= (80+1)81 - \sum_{i=0}^{80} i = 81^2 - \sum_{i=1}^{80} i = 81^2 - \left(\frac{80 \cdot 81}{2}\right)$

$= 81\left(81 - \frac{80}{2}\right) = 81 \cdot 26 = 1326$

2. Sea $n \geq 1$ y $\mathcal{F}_n$ el conjunto de funciones de $\{1, \ldots, n\}$ en $\{1, 2\}$, es decir,

$$\mathcal{F}_n = \{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, 2\} \mid f \text{ es función }\}.$$

(a) Sea $i \in \{1, 2\}$ fijo. Se define el conjunto F_i de todas las funciones $f \in \mathcal{F}_n$ tales que $f(i) = i$, es decir,

$$F_i = \{f \in \mathcal{F}_n \mid f(i) = i\}.$$

Pruebe que $|F_1| = |F_2| = 2^{n-1}$ y $|F_1 \cap F_2| = 2^{n-2}$.

(b) Considerando $n = 10$, muestre que hay 768 funciones $f \in \mathcal{F}$ tales que $f(1) = 1$ o $f(2) = 2$, es decir, pruebe que

$$|\{f \in \mathcal{F}_{10} \mid f(1) = 1 \vee f(2) = 2\}| = 768.$$

(a) Veamos $|F_1|$, esto es $|\{f \in \mathcal{F}_n : f(1) = 1\}|$

Tenemos que $f \in F_1 \Rightarrow f(1) = 1$, por lo demás, para $f(i)$ con $i \in \{2, \ldots, n\}$, $f(i)$ puede tomar 2 valores, $f(i) = 1$ o $f(i) = 2$, por lo que, para cada uno de estos $n-1$ valores que puede tomar i tenemos 2 valores, lo que nos da un total de 2^{n-1} posibles opciones

El razonamiento con F_2 es análogo $\Rightarrow |F_2| = 2^{n-1}$

Ahora, veamos cuantas $f \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ existen, tenemos que dichas f, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$.

Luego para $i \in \{3, \dots, n\}$, $f(i)$ puede ser 1 o 2, luego tenemos 2^{n-2} combinaciones $\Rightarrow |\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2| = 2^{n-2}$

(b) Considerando $n = 10$, muestre que hay 768 funciones $f \in \mathcal{F}$ tales que $f(1) = 1$ o $f(2) = 2$, es decir, pruebe que

$$|\{f \in \mathcal{F}_{10} \mid f(1) = 1 \vee f(2) = 2\}| = 768.$$

Tenemos que calcular $|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| = |\mathcal{F}_1| + |\mathcal{F}_2| - |\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2|$

Sabemos que $|\mathcal{F}_1| = |\mathcal{F}_2| = 2^{n-1}$ y $|\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2| = 2^{n-2}$

Luego, $|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-2}$

$$= 2^n - 2^{n-2} = 2^{n-2}(2^2 - 1) = 3 \cdot 2^{n-2}$$

Tomando $n = 10$, $|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| = 3 \cdot 2^8 = 3 \cdot 256 = 768$

3. Demuestre que para A, B y C conjuntos finitos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Sabemos que si A, B son finitos,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Puesto que $B \cup C$ es finito

$$|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$

Por un lado

$$|(A\cap B)\cup(A\cap C)| = |A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap A\cap C|$$
$$= |A\cap B| + |A\cap C| - |A\cap B\cap C|$$

Finalmente,

$$\boxed{|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|}$$