Parte RP 88

1. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$. Compruebe las siguientes igualdades usando el teorema del binomio.

   (a) $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

   (b) $\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{n-k} y^k = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^k y^{n-k}$.

   (c) $(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^{n-k} y^k$

   (d) $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

Teorema 7.21 (Binomio de Newton) *Sean $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

a) V Vemos que $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

b) F Dar una contradicción

Notar que se arregla cambiando la notación mediante

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{m-j} y^j = (x+y)^m = (y+x)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} y^{m-j} x^j$$

c) F Dar una contradicción

Vemos que se arregla cambiando $(-1)^{n-k}$ por $(-1)^k$ pues

$$(x-y)^n = (x+(-y))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (-y)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} (-1)^k y^k$$

d) V Notar que

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

2. Demuestren que $\forall n, i, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq i \leq n$, $\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$ y úsenlo para probar sin uso de inducción que:

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

Proposición 7.19 *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$,* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Dem: Notemos que

$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \frac{n!}{\cancel{i!}(n-i)!} \cdot \frac{\cancel{i!}}{k!(i-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\, k!\, (i-k)!} = \frac{n!}{k!\,(\underbrace{[n-k]-[i-k]}_{(n-i)})!\,(i-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(i-k)!([n-k]-[i-k])!} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

Haciendo uso de este hecho,

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}$$

$$= \binom{n}{k} \underbrace{\sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k}}_{\text{Cambio de índice}} = \binom{n}{k} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i}}_{2^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{k} 2^{n-k}$$