Parte RP S7

1. En $\mathbb{R}^2$ se define: $(x,y)\mathcal{R}(u,v) \iff x^2+y^2 = u^2+v^2$.

   (a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

   (b) Determine las clases de equivalencia $[(0,0)]$, $[(-1,2)]$ y en general $[(a,b)]$, e interprete geométricamente el significado de una clase.

a) Verificamos que cumple las propiedades

$\mathcal{R}$ es refleja: Vemos $(x,y)\mathcal{R}(x,y) \iff x^2+y^2 = x^2+y^2$ que es cierto $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\mathcal{R}$ es simétrica: Vemos si $(x,y)\mathcal{R}(u,v) \Rightarrow (u,v)\mathcal{R}(x,y)$

Sea $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, notamos que

$(x,y)\mathcal{R}(u,v) \iff x^2+y^2 = u^2+v^2 \Rightarrow u^2+v^2 \iff (u,v)\mathcal{R}(x,y)$

$\mathcal{R}$ es transitiva: Veamos si $\forall (x,y),(u,v),(w,z) \in \mathbb{R}$

$(x,y)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(w,z)$

tenemos $\quad x^2+y^2 = \underbrace{u^2+v^2 \quad \wedge \quad u^2+v^2}_{} = w^2+z^2$

$\Rightarrow x^2+y^2 = w^2+z^2 \iff (x,y)\mathcal{R}(w,z)$

<u>Luego $\mathcal{R}$ es de equivalencia</u>

b) Recordemos la definición de clase de equivalencia para un elemento $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

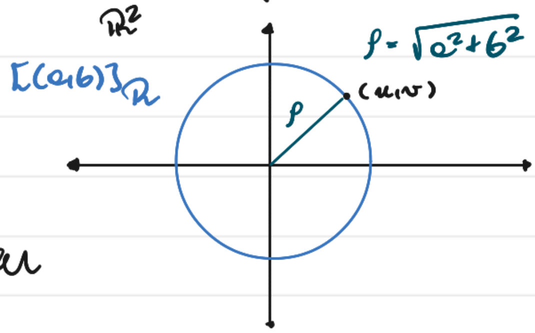
$$[(x,y)]_{\mathcal{R}} = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\mathcal{R}(u,v)\}$$

Luego $[(0,0)]_{\mathcal{R}} = \{(u,v)\in\mathbb{R} \mid u^2+v^2 = 0\} = \{(0,0)\}$

$$[(-1,2)]_{\mathcal{R}} = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 = 5\}$$

$$[(a,b)]_{\mathcal{R}} = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2 = a^2+b^2\}$$

Se puede interpretar $[(a,b)]_{\mathcal{R}}$ como la colección de puntos que se encuentran a igual distancia que (a,b) respecto al origen



2. Para cada $A \subseteq \mathbb{R}$ fijo, se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mediante:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in A.$$

(a) Probar que si $A = \mathbb{Q}$, entonces $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

(b) Encuentre la clase de equivalencia $[\frac{1}{2}]$. Determine si son iguales las siguientes clases de equivalencia: $[\frac{1}{2}], [\sqrt{2}], [\sqrt{8}], [1]$.

a) Veamos si $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}^*$

$\mathcal{R}$ es refleja: Notemos que $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow \cancel{\frac{x}{x}}^{1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow V$

$\mathcal{R}$ es simétrica: Basta notar que $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$ luego

$$\underline{x\mathcal{R}y} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{y}{x} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \underline{y\mathcal{R}x}$$

$\mathcal{R}$ es Transitiva Notar que si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \wedge \frac{y}{z} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{z} = \underbrace{\frac{x}{y}}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{\frac{y}{z}}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow \underline{x\mathcal{R}z}$$

Por lo que $\mathcal{R}$ es de equivalencia

b) Veamos $[\frac{1}{2}]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid 1/2\, \mathcal{R}\, x\}$

$$= \{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{2x} \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$$

Ahora veamos $[\sqrt{2}]_{\mathcal{R}} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{\sqrt{2}}{x} \in \mathbb{Q}\}$

Notemos que $\frac{\sqrt{2}}{x} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z} : \frac{\sqrt{2}}{x} = \frac{\hat{a}}{\hat{b}} \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{\hat{b}}{\hat{a}}}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x = q\sqrt{2}$$

Luego $[\sqrt{2}]_R = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{\sqrt{2}}{x} \in \mathbb{Q}\}$ $\qquad [\frac{1}{2}]_R$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ||$

$= \{x \in \mathbb{R}^* \mid x = q\sqrt{2},\ q \in \mathbb{Q}\} \neq \mathbb{Q}$

Similarmente

$[\sqrt{8}]_R = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x = q\sqrt{8},\ q \in \mathbb{Q}\}$

$2q = q$ $\quad = \{x \in \mathbb{R}^* \mid x = 2q\sqrt{2},\ q \in \mathbb{Q}\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^* \mid x = q\sqrt{2},\ q \in \mathbb{Q}\} = [\sqrt{2}]_R$

Y finalmente, $[1]_R = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q} = [1/2]_R$

3. Calcular las siguientes sumatorias.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(2n+k-1)^2$.

(b) $\sum_{k=1}^{m}(2k^2-3k+5)$.

(c) $\sum_{j=1}^{100}\left(3^j \cdot 2^{j+2} - 5^{1-j}\right)$.

(d) $\sum_{k=20}^{30}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

(e) $\sum_{t=1}^{s}\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t+2}}$.

(f) $\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{l}{5^k}+1\right)$.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2n+k-1)^2 = n\left[(2n+k)^2 - 2(2n+k)+1\right]$

$= n\left[4n^2+4nk+k^2-4n-4k+1\right]$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k^2-3k+5) = 2\sum_{k=1}^{m}k^2 - 3\sum_{k=1}^{m}k + \sum_{l=1}^{m}5$

$\displaystyle = \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} - \frac{3m(m+1)}{2} + 5m$

c) $\sum_{s=1}^{100} (3^s \cdot 2^{s+2} - 5^{1-s})$ Recuerdo: $\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$

$$= \sum_{s=0}^{100} \left(3^s \cdot 2^s \cdot 4 - 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^s\right) - (\underbrace{3^0}_{1} \cdot \underbrace{2^2}_{4} - 5^{1-0})$$
$$4 - 5$$

$$= 4 \sum_{s=0}^{100} 6^s - 5 \sum_{s=0}^{100} \left(\frac{1}{5}\right)^s + 1$$

$$= 4\left(\frac{6^{101}-1}{5}\right) - 5\left(\frac{(1/5)^{101}-1}{1/5-1}\right) + 1$$

d) $$\sum_{k=20}^{30} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=20}^{30} \log\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=20}^{30} \log(k+1) - \log(k) \longrightarrow \text{Suma Telescópica}$$

$$= \left(\cancel{\log(21)} - \log(20)\right) + \left(\cancel{\log(22)} - \cancel{\log(21)}\right) + \dots + \left(\log(31) - \cancel{\log(30)}\right)$$

$$= \log(31) - \log(20) = \log\left(\frac{31}{20}\right)$$

e) $$\sum_{t=1}^{S} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t+2}} = \sum_{t=1}^{S} \frac{\sqrt{t+2}-\sqrt{t}}{(t+2)-t} = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{t=1}^{S} \sqrt{t+2}-\sqrt{t}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\cancel{\sqrt{3}}-\sqrt{1}\right) + \left(\cancel{\sqrt{4}}-\cancel{\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k}\right) + \dots + \left(\sqrt{S+2}-\cancel{\sqrt{S}}\right)\right)$$ Telescópica

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{S+2} - 1\right)$$

(f) $$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{l}{5^k}+1\right)$$ → Se suma m veces

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5^k}\sum_{l=1}^{m} l + m\right)$$ → Se suma n veces

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5^k}\frac{l(l+1)}{2}\right)+nm$$ → Geométrica

Recuerdo: $$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}$$

$$=\frac{l(l+1)}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^k}+nm$$

$$=\frac{l(l+1)}{2}\left(\frac{(1/5)^{n+1}-1}{1/5-1}\right)+nm$$