Parte RP S6

2. Sean $f : A \longrightarrow B$ una función, $A_1, A_2 \subseteq A$ y $B_1 \subseteq B$. Demuestren que:

   (a) $f(A_1) \setminus f(A_2) = f(A_1 \setminus A_2) \iff f$ es inyectiva.

   (b) $f^{-1}(B_1^c) = (f^{-1}(B_1))^c$

(a) Notar que siempre $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

Esto pues si $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$

$$\Rightarrow \exists a \in A_1 : f(a) = b \wedge \nexists a' \in A_2 : f(a') = b$$

Luego $a \in A_1 \setminus A_2$ y entonces $b \in f(A_1 \setminus A_2)$, de donde tenemos $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

$\Leftarrow$) Sea f inyectiva, basta probar que $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$

Sea $y \in f(A_1 \setminus A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \setminus A_2 : f(x) = y$, notemos que como $x \in A_1 \Rightarrow y \in f(A_1)$.

Veamos que $y \notin f(A_2)$, supongamos que $y \in f(A_2)$, luego $\exists x' \in A_2 : y = f(x')$, pero $x \notin A_2 \Rightarrow x \neq x'$ y

$$f(x) = y = f(x') \overset{f \text{ es inyectiva}}{\Rightarrow} x = x'$$

Luego $y \notin f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \setminus f(A_2)$

$$\Rightarrow \underline{f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)}$$

$\Rightarrow$) Por contrarecíproca,

Supongamos que f no es inyectiva

$$\Rightarrow \exists x \neq y : f(x) = f(y).$$

Consideremos $A_1 = \{x\}, A_2 = \{y\}$, notemos que $x \in A_1 \setminus A_2$ pero no se tiene la contención $f(A_1 \setminus A_2) \subseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$. Pues $f(x) \in f(A_1 \setminus A_2)$, pero como $f(x) = f(y)$, entonces $f(A_1) = \{f(x)\} = f(A_2) \Rightarrow f(A_1) \setminus f(A_2) = \emptyset$

$$\Rightarrow \underline{f(x) \in \emptyset}$$

b) $\boxed{f^{-1}(B_1^c) = f^{-1}(B_1)^c}$ → $f^{-1}(C) = \{x \in E \mid f(x) \in C\}$

Vemos que

$$f^{-1}(B_1^c) = \{x \in B : f(x) \in B_1^c\} = \{x \in B : f(x) \notin B_1\}$$

$$= \{x \in B : f(x) \in B_1\}^c = f^{-1}(B)^c$$

3. En $\mathbb{R}$ se define la relación $\mathcal{R}$ como:

$$x\mathcal{R}y \iff y - x \in \mathbb{N}.$$

(a) Demuestren que $\mathcal{R}$ es una relación de orden, es decir, que es refleja, antisimétrica y transitiva.

(b) ¿Es de orden parcial o total? Justifiquen.

a) $\mathcal{R}$ es reflexe: Si para todo x, $x\mathcal{R}x \iff x - x \in \mathbb{N}$ se tiene pues $0 \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{R}$ es antisimétrica: Si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Notemos que

$$y - x \in \mathbb{N} \wedge x - y \in \mathbb{N} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$\mathcal{R}$ es transitiva: Si $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

Vemos que $y - x \in \mathbb{N} \wedge z - y \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{(z-y)}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{(y-x)}_{\in \mathbb{N}} = z - x \in \mathbb{N} \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

b) Vemos que el orden no puede ser total pues tomando $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \notin \mathbb{N} \wedge x - y \notin \mathbb{N}$

Por lo tanto, x e y no son comparables y entonces el orden es parcial y no total