Pauta RP S5

1. Sean $A = \{x \in \mathbb{R} | -x \geq 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 > 0\}$. Considere las funciones $f : A \to B$, $g : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ definidas mediante $f(x) = \sqrt{-x}$ y $g(x) = \frac{(-x)^{1/2} + (-x)^{3/2}}{1-x}$. Determinen si $f = g$.

Veamos si f y g tienen mismo dom e imagen. Notemos que $A = (-\infty, 0]$ y $B = \mathbb{R}$ pues $x^2 + x + 1$ es continua, sabemos que es positiva en $x = 0$ y vemos que nunca se hace cero en $\mathbb{R}$ pues $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$.

Luego $x^2 + x + 1 > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow B = \mathbb{R}$

Notemos por lo demás

$x \in A \Rightarrow x \neq -1$

$$g(x) = \frac{(-x)^{1/2} + (-x)^{\frac{1}{2}}(-x)}{1-x} = \frac{(-x)^{1/2}(\cancel{1-x})}{\cancel{1-x}}$$

$$= \sqrt{-x} = f(x)$$

Y entonces concluimos que $f = g$

2. Sea E universo de referencia y $A, B \subseteq E$. Se define

$$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$$
$$X \longmapsto f(X) = A \cap (B \cup X)$$

(a) Prueben que $f \circ f = f$.

(b) Si $A \neq E \vee B \neq \emptyset$, prueben que f no es inyectiva.

(c) ¿Bajo qué condiciones sobre A y B es f epiyectiva?

(a) Veamos que $f \circ f = f$, por un lado tenemos que $f \circ f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$

Por lo que comparte dominio y codominio con f.

Consideremos ahora $X \in \mathcal{P}(E)$ arbitrario, tenemos

$$f(f(X)) = A \cap (B \cup f(X)) = A \cap (B \cup (A \cap (B \cup X)))$$
$$= A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B \cup X)))$$
$$= A \cap (B \cup X) = f(X)$$

Como $X \in \mathcal{P}(E)$ era arbitrario concluimos que

$$\boxed{f \circ f = f}$$

(6) Veamos que si $A \neq E \vee B \neq \phi$ entonces veamos que f no es inyectiva.

Notar que $f(X) = A \cap (B \cup X) = (A \cap B) \cup (A \cap X)$

Si $A \neq E$, tomamos $X_1 \subset A$ y $X_2 = X_1 \cup A^c$, como $A \neq E$ entonces $A^c \neq \phi \Rightarrow X_1 \neq X_2$, pero

$$f(X_2) = (A \cap B) \cup (A \cap (X_1 \cup A^c))$$
$$= (A \cap B) \cup (A \cap X_1) = f(X_1)$$

$\Rightarrow$ f no es inyectiva

Si $B \neq \phi$, elegimos $X_1 \subset B$ tal que $X_1 \neq \phi$ y $X_2 = B \setminus X_1$.

Entonces como $B \neq \phi \Rightarrow X_1 \neq X_2$ y $X_1, X_2 \subset B$

luego

$$f(x_1) = A \cap (\underbrace{B \cup x_1}_{B}) = A \cap (\underbrace{B \cup x_2}_{B}) = f(x_2)$$

$\Rightarrow$ f no es inyectiva

Concluimos que $A \neq E \lor B \neq \emptyset \Rightarrow f$ no es inyectiva

(c) Buscamos condiciones sobre A, B tales que f sea epiyectiva

Recordamos $f(x) = A \cap (B \cup x)$, luego si $A \neq E$, no existe x' tal que $f(x') = E$

$\Rightarrow$ f no es epiyectiva

Entonces es de la forma $f(x) = B \cup x$, pero si $B \neq \emptyset$

$$\Rightarrow B \cup x \neq \emptyset$$

luego no existe x' tal que $f(x') = \emptyset$

$\Rightarrow$ f no es epiyectiva $\Rightarrow$ $B = \emptyset$

Por lo que debe ser que $A = E$ y $B = \emptyset$ para que f sea epiyectiva, en dicho caso $f(x) = x$ que corresponde a la función identidad en $P(E)$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ la función definida mediante $f(x, Y) = (Y^c, ax + b)$, donde $Y^c = \mathbb{R} \setminus Y$ es el complemento del conjunto Y en $\mathbb{R}$.

(a) Demuestren que f es biyectiva si y solo si $a \neq 0$.

(b) Para $a \neq 0$, encuentren f^{-1} indicando dominio, codominio y gráfico.

(c) Comprueben, para $a \neq 0$, que $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}\times\mathcal{P}(\mathbb{R})}$ y que $f \circ f^{-1} = id_{\mathcal{P}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}}$.

(a) Veamos la contrarecíproca

$$f \text{ no es biyectiva} \Leftrightarrow a = 0$$

$\Rightarrow$) Supongamos f no es iny, $\exists (x_1, Y_1) \neq (x_2, Y_2)$ tal que

$$f(x_1, Y_1) = f(x_2, Y_2) \Rightarrow (Y_1^c, ax_1 + b) = (Y_2^c, ax_2 + b)$$
$$\Rightarrow a = 0$$

Supongamos no es epiyectiva, como $Y \to Y^c$ es epiyectiva entonces debe ser que $x \to ax + b$ no sea epiyectiva, como tiene forma de lineal afín (biyectiva) $\Rightarrow a = 0$

$\Leftarrow$) Si $a = 0$, tomemos $x_1 \neq x_2$, luego $(x_1, Y) \neq (x_2, Y)$

Pero $f(x_1, Y) = (Y^c, b) = f(x_2, Y)$

$$\Rightarrow f \text{ no es biyectiva}$$

(b) Para $a \neq 0$, encontremos f^{-1} y $\text{dom}(f^{-1})$ $\text{Cod}(f^{-1})$ y $\text{Gr}(f^{-1})$

Notemos que $f^{-1}(Y, x) = \left(\frac{x-b}{a}, Y^c\right)$ pues vemos

$$f\left(\underbrace{\frac{x-b}{a}, Y^c}_{x}\right) = \left(\underbrace{Y^{c^c}, a\left(\frac{x-b}{a}\right) + b}_{y}\right)$$
$$= (Y, x)$$

$$\Rightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

Por lo demás, $f^{-1}: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$, luego

$\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, $\mathrm{Cod}(f^{-1}) = \mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$Gr(f^{-1}) = \{ (x, f^{-1}(x)) \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathcal{P}(\mathbb{R})) : x \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \}$$

(c) Directo de evaluar

4. **(Extra).** Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. Para todo subconjunto A de E se define la función característica de A como:

$$\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

a) Describan $\chi_E(x)$ y $\chi_\emptyset(x)$ para todo $x \in E$.

b) Demuestren que $\forall x \in E, \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$.

c) Si $C, D \subseteq E$, demuestren la equivalencia: $C \subseteq D \iff \forall x \in E, \chi_C(x) \leq \chi_D(x)$

a) Vemos $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \to \text{No sucede} \end{cases}$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \ \chi_E(x) = 1$$

Vemos $\chi_\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \emptyset \to \text{No sucede} \\ 0 & \text{si } x \notin \emptyset \end{cases}$

$$\Rightarrow \forall x \in E, \ \chi_\emptyset(x) = 0$$

b) Sean $A, B \subset E$, si $x \in E$, notemos que

$\chi_{A\cap B}(x) = 0 \Rightarrow x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A \vee x \notin B$

$\Rightarrow \chi_A(x) = 0 \vee \chi_B(x) = 0 \Rightarrow \chi_A(x)\chi_B(x) = 0$

Por otro lado si $\chi_{A\cap B}(x) = 1 \Rightarrow x \in A \cap B$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \wedge \chi_B(x) = 1$$

$$\Rightarrow \chi_A(x)\,\chi_B(x) = 1$$

Luego $\forall x \in E,\ \chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\,\chi_B(x)$

c) Veamos por doble implicancia

$\Rightarrow)$ Si $C \subseteq D$ y $x \in E$, entonces tenemos los sgtes. casos

1. $x \in C$: luego $x \in D \Rightarrow \chi_C(x) = 1 \wedge \chi_D(x) = 1$

$$\Rightarrow \chi_C(x) \leq \chi_D(x)$$

2. $x \in D \setminus C$: luego $\chi_C(x) = 0 \wedge \chi_D(x) = 1$

$$\Rightarrow \chi_C(x) \leq \chi_D(x)$$

3. $x \in D^c$: luego $\chi_C(x) = 0 \wedge \chi_D(x) = 0$

$$\Rightarrow \chi_C(x) \leq \chi_D(x)$$

Concluimos que $\forall x \in E,\ \chi_C(x) \leq \chi_D(x)$

$\Leftarrow)$ Si $\forall x \in E, \chi_C(x) \leq \chi_D(x)$, como $\chi_\cdot$ toma dos valores

Si $x \in C \Rightarrow \chi_C(x) = 1 \Rightarrow \chi_D(x) = 1 \Rightarrow x \in D$

Luego $C \subseteq D$