

1. Sea $A = \{0, 1\}$, encuentre explícitamente $A \times \mathcal{P}(A)$.

Recordar que $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$, tenemos por un lado, como $C \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow C \subseteq A$

$$\mathcal{P}(A) := \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, A \}$$

Entonces

$$A \times \mathcal{P}(A) = \{ (0, \emptyset), (0, \{0\}), (0, \{1\}), (0, A), (1, \emptyset), (1, \{0\}), (1, \{1\}), (1, A) \}$$

2. Sea E un conjunto no vacío. Considere las familias $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$, donde, para todo $i \in I, j \in J$, $A_i, B_j \subseteq E$ y $A_i \neq \emptyset \neq B_j$, para I y J conjuntos de índices (no necesariamente finitos). Demuestre que

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) \times \bigcap_{j \in J} \mathcal{P}(B_j) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \mathcal{P}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right).$$

Por un lado sabemos que $\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$

Que si $X \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i)$

$$\Rightarrow \exists \hat{i} \text{ tal que } X \in \mathcal{P}(A_{\hat{i}})$$

$$\Rightarrow X \subseteq A_{\hat{i}} \Rightarrow X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\Rightarrow X \in \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

luego $\bigcup_{i \in I} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$

Por otro lado tenemos que

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})\right)$$

Pues si $X \in \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \Rightarrow \forall \mathcal{F} \in \mathcal{I}, X \in \mathcal{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$

$$\Rightarrow \forall \mathcal{F} \in \mathcal{I}, X \subseteq \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$$

$$\Rightarrow X \subseteq \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \Rightarrow X \in \mathcal{P}\left(\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}\right)$$

luego, usando que $A \subseteq A' \wedge B \subseteq B' \Rightarrow A \times B \subseteq A' \times B'$
Tenemos

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{P}(A_i) \times \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{P}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \times \mathcal{P}\left(\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_{\mathcal{F}}\right)$$

3. Para $a \in \mathbb{R}$ se define $L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = a + x\}$. Pruebe que $\mathcal{C} = \{L_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ es partición de $\mathbb{R}^2$.

Baste verificar que $\forall L_a, L_{a'} \in \mathcal{C}, L_a \cap L_{a'} = \emptyset$,
ver que $L_a \neq \emptyset \quad \forall a \in \mathbb{R}$ y que $\bigcup_{L \in \mathcal{C}} L = \mathbb{R}^2$

Es claro que $L_a \neq \emptyset \quad \forall a \in \mathbb{R}$, además $L_a \cap L_{a'} = \emptyset$
 $\forall a, a' \in \mathbb{R}$ pues representan rectas paralelas

Veamos $\bigcup_{L \in \mathcal{C}} L = \mathbb{R}^2$. Notemos $\bigcup_{L \in \mathcal{C}} L = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} L_a$

Vamos por doble inclusión ,

⊆ Como cada $h_e \subseteq \mathbb{R}^2 \Rightarrow \bigcup_{e \in \mathbb{R}} h_e \subseteq \mathbb{R}^2$

⊇ Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, vamos que existe $e \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \in h_e$.

Esto es , encontrar e tal que $y = e + x$, basta tomar $\hat{e} = y - x \in \mathbb{R}$.

luego $x \in h_{\hat{e}} \Rightarrow x \in \bigcup_{e \in \mathbb{R}} h_e \Rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq \bigcup_{e \in \mathbb{R}} h_e$

Por lo que $\bigcup_{e \in \mathbb{R}} h_e = \mathbb{R}^2$ y entonces $\mathcal{C}$ es una partición de $\mathbb{R}^2$.

4. Sean A y B dos conjuntos no vacíos, y sean Ω_A y Ω_B particiones de A y B , respectivamente. Demuestre que la familia

$$\Omega_A \times \Omega_B = \{X \times Y \mid X \in \Omega_A \wedge Y \in \Omega_B\}$$

es una partición de $A \times B$.

Debemos ver que $X \times Y \in \Omega_A \times \Omega_B \neq \emptyset$, ver que $X \times Y \cap X' \times Y' = \emptyset$ si $X \neq X'$, $Y \neq Y'$ y que

$$\bigcup_{\substack{X \in \Omega_A \\ Y \in \Omega_B}} X \times Y = A \times B$$

En primer lugar , como $A, B \neq \emptyset$ y Ω_A, Ω_B son particiones , $X \in \Omega_A \wedge Y \in \Omega_B \Rightarrow X, Y \neq \emptyset$
 $\Rightarrow \underline{X \times Y \neq \emptyset}$

Por otro lado, $X \times Y \cap X' \times Y' = \emptyset$ si $X \neq X'$ o $Y \neq Y'$ pues como $\mathcal{R}_A$ y $\mathcal{R}_B$ son particiones, razonando por contradicción, si existe

$$w \in X \times Y \cap X' \times Y' \Rightarrow w \in X \times Y \\ w \in X' \times Y'$$

$$\Rightarrow w = (w_1, w_2) \text{ con } w_1 \in X, w_2 \in Y$$

$$w = (w_1', w_2') \text{ con } w_1' \in X', w_2' \in Y'$$

$$\Rightarrow w_1 = w_1', w_2 = w_2'$$

$$\Rightarrow \underline{X \cap X' \neq \emptyset \wedge Y \cap Y' \neq \emptyset}$$

Pues $\mathcal{R}_A$ y $\mathcal{R}_B$ son particiones, luego sus elementos son disjuntos entre sí.

Veamos ahora que

$$\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{R}_A \\ Y \in \mathcal{R}_B}} X \times Y = A \times B$$

○ Si $w \in \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{R}_A \\ Y \in \mathcal{R}_B}} X \times Y \Rightarrow \exists X' \in \mathcal{R}_A \wedge Y' \in \mathcal{R}_B$

tal que $w \in X' \times Y' \Rightarrow w = (w_1, w_2), w_1 \in X' \subseteq A$
 $\Rightarrow w \in A \times B$ $w_2 \in Y' \subseteq B$

luego $\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{R}_A \\ Y \in \mathcal{R}_B}} X \times Y \subseteq A \times B$

2] Sea $W \in A \times B \Rightarrow W = (w_1, w_2)$, $w_1 \in A$, $w_2 \in B$
Como $\mathcal{R}_A, \mathcal{R}_B$ son particiones de A y B

$$\Rightarrow \exists \hat{X} \in \mathcal{R}_A, \exists \hat{Y} \in \mathcal{R}_B : w_1 \in \hat{X}, w_2 \in \hat{Y}$$

$$\Rightarrow W \in \hat{X} \times \hat{Y} \subset \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{R}_A \\ Y \in \mathcal{R}_B}} X \times Y$$

$$\text{Por lo que } A \times B \subset \bigcup_{\substack{X \in \mathcal{R}_A \\ Y \in \mathcal{R}_B}} X \times Y$$

Concluimos entonces

$$\bigcup_{\substack{X \in \mathcal{R}_A \\ Y \in \mathcal{R}_B}} X \times Y = A \times B$$