

1. Considere la sucesión definida recursivamente por:

$$a_0 = 2, a_1 = 3, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ si } n \geq 2.$$

Demuestre que $a_n = 1 + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración por Inducción

Caso base : $a_0 = 1 + 2^0 = 2$. ok! $a_1 = 1 + 2^1 = 3$ ok!

Paso inductivo : Ver que $a_n = 1 + 2^n \Rightarrow a_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$

Vemos $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \stackrel{PI}{=} 3(1+2^n) - 2(1+2^{n-1})$

$$= 3 + 3 \cdot 2^n - 2 - 2^n$$

$$= 1 + 2 \cdot 2^n = 1 + 2^{n+1}$$

∴ Por inducción se concluye que $a_n = 1 + 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. Rayen y Roberto están estudiando para un prueba de lógica. Para ello, definen los siguientes conjuntos sobre el conjunto de personas U :

$$H = \{x \in U \mid x \text{ es hermano de Roberto}\}, \quad A = \{x \in U \mid x \text{ es amigo de Rayen}\},$$

$$R = \{x \in U \mid x \text{ tiene un curso con RP}\} \text{ e } I = \{x \in U \mid x \text{ está cursando Intro al Álgebra}\}.$$

Escriba las siguientes situaciones como proposiciones sobre conjuntos.

- Todos son hermanos de Roberto
- Rayen no tiene amigos..
- Tod@s l@s amigos de Rayen que están cursando Intro al Álgebra, lo hacen en una sección con RP.
- Los hermanos de Roberto que no tienen ningún curso con RP se dividen en los que son amigos de Rayen y los que no están cursando Intro al Álgebra.

$$a) U = H \quad b) A = \emptyset \quad c) A \cap I \subset R$$

$$d) H \cap R^c = A \cup I^c$$

3. Sean $A, B, C \subseteq E$, donde E es el universo de referencia. Si $A \setminus B = \emptyset$, $C \subseteq A^c$ y $B \setminus C = B$, demuestre que

$$[(A \cup B) \cup ((A \cap B) \setminus C)] \setminus [B^c \cap (A \cap C^c)] = B.$$

Datos: $A \cap B^c = \emptyset$, $C \subseteq A^c$ ($C^c \supseteq A$),

$$\Rightarrow \underbrace{A \cap B}_{A \subseteq B}$$

$$B \cap C^c = B$$

tenemos

$$\begin{aligned} & [\underbrace{(A \cup B)}_B \cup \underbrace{(A \cap B)}_B \cap \underbrace{(B^c \cap (A \cap C^c))^c}_A] \\ &= [\underbrace{(B)}_B \cup \underbrace{(A \cap B)}_B \cap \underbrace{(B^c \cap A)^c}_{\emptyset^c = U}] \\ &= B \cap U \\ &= B \end{aligned}$$

Note: También es válido usar Distributividad de $\cap$ y $\cup$.

4. Considere los conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{3n+2}{n+2}, \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{3n+11}{n+5}, \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demuestre que $B \subseteq A$, pero $B \neq A$.

1 Si $x \in B \Rightarrow x = \frac{3u+11}{u+5}$, notemos que para algún $u \in \mathbb{N}$

$$x = \frac{3u+11}{u+5} = \frac{3u+9+2}{(u+3)+2} = \frac{3(u+3)+2}{u+3+2}$$

Tomando $u' = u+3 \in \mathbb{N}$,

$$x = \frac{3u'+2}{u'+2} \Rightarrow x \in A$$

∴ $B \subseteq A$

2 Considerar un contraejemplo.

Notar que si $x \in A$ con $u=1 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \in A$, vemos si $\frac{5}{3} \in B$.

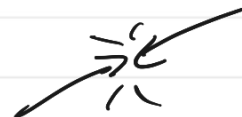
lo anterior implica

$$\frac{5}{3} = \frac{3u+11}{u+5}$$

$$8u+25 = 9u+33$$

$$\Rightarrow 8u = 8$$

$$\Rightarrow u \neq \mathbb{N}$$



∴ Concluimos que $B \neq A$