Pauta RP S3

1. Considere la sucesión definida recursivamente por:

$$a_0 = 2, a_1 = 3, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \text{ si } n \geq 2.$$

Demuestre que $a_n = 1 + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración Por Inducción

Caso base: $a_0 = 1 + 2^0 = 2$. ok! $a_1 = 1 + 2^1 = 3$ ok!

Paso inductivo: Veo que $a_n = 1 + 2^n \Rightarrow a_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$

Vemos $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \overset{P.I}{=} 3(1+2^n) - 2(1+2^{n-1})$

$= 3 + 3 \cdot 2^n - 2 - 2^n$

$= 1 + 2 \cdot 2^n = 1 + 2^{n+1}$

$\therefore$ Por inducción se concluye que $a_n = 1 + 2^n \ \forall n \in \mathbb{N}$

2. Rayen y Roberto están estudiando para un prueba de lógica. Para ello, definen los siguientes conjuntos sobre el conjunto de personas U:

$H = \{x \in U \mid x \text{ es hermano de Roberto}\}$, $A = \{x \in U \mid x \text{ es amigo de Rayen}\}$,
$R = \{x \in U \mid x \text{ tiene un curso con RP}\}$ e $I = \{x \in U \mid x \text{ está cursando Intro al Álgebra}\}$.

Escriba las siguientes situaciones como proposiciones sobre conjuntos.

(a) Todos son hermanos de Roberto

(b) Rayen no tiene amig@s..

(c) Tod@s l@s amig@s de Rayen que están cursando Intro al Álgebra, lo hacen en una sección con RP.

(d) Los hermanos de Roberto que no tienen ningún curso con RP se dividen en los que son amigos de Rayen y los que no están cursando Intro al Álgebra.

a) $U = H$ b) $A = \emptyset$ c) $A \cap I \subset R$

d) $H \cap R^c = A \cup I^c$

3. Sean $A, B, C \subseteq E$, donde E es el universo de referencia. Si $A \setminus B = \emptyset$, $C \subseteq A^c$ y $B \setminus C = B$, demuestre que

$$[(A \cup B) \cup ((A \cap B) \setminus C)] \setminus [B^c \cap (A \cap C^c)] = B.$$

Datos: $\underbrace{A \cap B^c = \emptyset}_{\Rightarrow A \subset B}$, $C \subseteq A^c$ $(C^c \supseteq A)$,

$$B \cap C^c = B$$

Tenemos

$$[\underbrace{(A \cup B)}_{B} \cup (\underbrace{(A \cap B) \cap C^c}_{B}) \cap (B^c \cap (\underbrace{A \cap C^c}_{A}))^c]$$

$$= [(B) \cup \underbrace{(A \cap B)}_{B}) \cap (\underbrace{B^c \cap A}_{\emptyset^c = U})^c]$$

$$= B \cap U$$

$$= B$$

Nota: También es válido usar Distributividad de $\cap$ y $\cup$.

4. Considere los conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{3n+2}{n+2},\ \text{para algún } n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{3n+11}{n+5},\ \text{para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Demuestre que $B \subseteq A$, pero $B \neq A$.

$\subseteq$ Si $x \in B \Rightarrow x = \dfrac{3n+11}{n+5}$, notemos que para algún $n \in \mathbb{N}$

$$x = \frac{3n+11}{n+5} = \frac{3n+9+2}{(n+3)+2} = \frac{3(n+3)+2}{n+3+2}$$

Tomando $n' = n+3 \in \mathbb{N}$,

$$x = \frac{3n'+2}{n'+2} \Rightarrow x \in A$$

$\therefore$ $B \subseteq A$

$\neq$ Considerar un contraejemplo.

Notar que si $x \in A$ con $n = 1 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3} \in A$, veamos si $5/3 \in B$.

Lo anterior implica

$$5/3 = \frac{3n+11}{n+5}$$

$$5n+25 = 9n+33$$

$$\Rightarrow 4n = -8$$

$$\Rightarrow n \notin \mathbb{N}$$

$\therefore$ Concluimos que $B \neq A$