Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
3 de abril de 2024

Auxiliar 3: Principio de Inducción y Conjuntos
Profesor: Patricio Quiroz
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Demuestre por inducción las siguientes proposiciones:

a) $\forall n \geq 10, n^3 < 2^n$

b) $(\forall n \geq 2), n^n \geq 2 \cdot n!$

c) Todo $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 24 se puede expresar como la suma de cincos y/o sietes.

P2. Se define la secuencia $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue:

$$\forall n \in \mathbb{N} : H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N} : H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$

P3. Se tienen 3^n monedas de aspecto idéntico, excepto que una de ellas es falsa y pesa menos que las demás. Muestre cómo con una balanza de platillos se puede identificar la moneda falsa en n pesadas.
Nota: Una balanza de platillos es una balanza con dos platillos que quedan al mismo nivel si el objeto colocado en cada uno de los platillos pesa lo mismo.

P4. Sean A, B, C conjuntos. Demuestre que:

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

c) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \implies A \cup B \subseteq C$

d) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \implies C \subseteq A \cap B$

Resumen

Principio de Inducción
Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y $P(n)$ es un predicado en el conjunto de referencia de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq n_0$, entonces:

$$[P(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0 + 1, P(n_0) \wedge P(n_0 + 1) \wedge ... \wedge P(n-1) \implies P(n))] \iff (\forall n \geq n_0, P(n))$$

Algunas Propiedades de Conjuntos
Sea E conjunto de referencia.

- $A \subseteq B \wedge C \subseteq D$
  $\implies A \cap C \subseteq B \cap D \wedge A \cup C \subseteq B \cup D$
- $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A/B := A \cap B^c$
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$
- $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$
- $A \cap E = A, A \cup E = A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap B = \emptyset \implies A \subseteq B^c \wedge B \subseteq A^c$