

Auxiliar 1: Lógica
Profesor: Patricio Quiroz
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Si p, q, r, s son proposiciones lógicas, determine, en caso de ser posible, el valor de verdad de la proposición s en los siguientes casos, con la información que se asigna:

- i) $(s \vee (s \wedge q)) \vee ((\bar{s} \vee q) \implies s)$ es verdadera.
- ii) $(s \vee p) \wedge (s \wedge (p \implies (p \vee r)))$ es falsa.
- iii) $\overline{(p \wedge (r \iff s))} \implies (\bar{p} \implies \bar{s})$ es verdadera.

P2. Demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías, con el método indicado en cada caso:

- i) $(p \implies \bar{q}) \wedge (r \implies q) \implies (p \implies \bar{r})$ (Simbólico)
- ii) $(\bar{p} \vee q) \vee (\bar{r} \wedge \bar{p}) \iff (p \implies q)$ (Exploratorio)
- iii) $(p \implies \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r \implies \bar{p}$ (Contradicción)

P3. Determine los valores de las proposiciones p, q, r, s, t sabiendo que la siguiente proposición es falsa:

$$[(p \iff q) \wedge \overline{(p \implies s)} \wedge \bar{t}] \implies [s \vee (q \implies s)]$$

- P4.**
- i) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{Z}$ y además $3ab + 2b$ es un número par, entonces a o b es un número par. Además determine la veracidad del enunciado recíproco.
 - ii) **[Propuesto]**
Demuestre que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ cumplen $(a > b) \wedge (b > |c|)$, entonces se cumple $|b| > |c| > -a$ y demuestre que la proposición recíproca es falsa.

Resumen

Tautologías básicas

- Dominancia: $p \vee V \iff V$, $p \wedge F \iff F$
- Identidad: $p \wedge V \iff p$, $p \vee F \iff p$
- Idempotencia: $p \wedge p \iff p$, $p \vee p \iff p$
- Doble negación: $\neg(\neg p) \iff p$
- Tercio excluso: $p \vee \bar{p} \iff V$
- Consistencia: $p \wedge \bar{p} \iff F$
- Absorción: $p \vee (p \wedge q) \iff p$,
 $p \wedge (p \vee q) \iff p$
- Relajación: $p \vee q \implies p$, $p \implies p \vee q$
- Caracterización de la implicancia:
 $(p \implies q) \iff \bar{p} \vee q$

Álgebra Booleana

- Leyes de De Morgan: $\overline{p \wedge q} \iff \bar{p} \vee \bar{q}$, $\overline{p \vee q} \iff \bar{p} \wedge \bar{q}$
- Conmutatividad: $p \wedge q \iff q \wedge p$, $p \vee q \iff q \vee p$
- Asociatividad: $p \vee (q \vee r) \iff (p \vee q) \vee r$
- Distributividad:
 - Del \vee con respecto al \wedge :
$$p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \quad (q \vee r) \wedge p \iff (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$$
 - Del \wedge con respecto al \vee :
$$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r), \quad (q \wedge r) \vee p \iff (q \vee p) \wedge (r \vee p)$$
- Transitividad:
 - Del \implies :
$$(p \implies q) \wedge (q \implies r) \implies (p \implies r)$$
 - de la \iff :
$$(p \iff q) \wedge (q \iff r) \implies (p \iff r)$$

Técnicas de demostración: Las siguientes **tautologías** pueden resultar útiles al momento de querer demostrar resultados matemáticos:

- Equivalencia dividida: $(p \iff q) \iff (p \implies q) \wedge (q \implies p)$
- Demostración por casos: $(p \vee p' \implies q) \iff (p \implies q) \wedge (p' \implies q)$
- Regla de separación (Modus Ponens): $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$
- Contrarrecíproca: $(p \implies q) \iff (\bar{q} \implies \bar{p})$
- Contradicción o reducción al absurdo: $[(p \implies q) \iff V] \iff [p \wedge \bar{q} \implies F]$