Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-4 Introducción al Álgebra
18 de Julio de 2024

Auxiliar Examen: Polinomios

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Solucione para x la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

P2. Sea p un polinomio a coeficientes reales.
Se sabe que este polinomio tiene como raíces a $1+i, 1-i, 3, 6, 2i, 4-i$. Encuentre el grado mínimo del polinomio p y encuentre la expresión de este polinomio sabiendo que es mónico.

P3. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

i) Demuestre que p es sobreyectivo si y solo si $gr(p) \geq 1$
Indicación: Recuerde el teorema fundamental del álgebra.

ii) Demuestre que p es inyectivo si y solo si $gr(p) = 1$
Indicación: Ponerse en casos para $gr(p)$.

P4.

i) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

ii) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raiz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raices y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$

P5. Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $gr(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisores por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

P6. Sea $P(x)$ un polinomio tal que $P(x^2+1) = x^4 + 4x^2$. Encuentre $P(x^2-1)$.

P7. Mediante división de polinomios, factorize los siguientes polinomios:

i) $2x^3 - 5x^2 - x - 6$

ii) $4x^4 - 15x^3 + 12x^2 + 4x$

iii) $2x^4 - 4x^3 - 42x^2 - 124x - 80$

iv) $-x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 9x + 18$

P8. Sean a, b, c números reales positivos.
¿Es posible que los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = bx^2 + cx + a$, $r(x) = cx^2 + ax + b$ tengan sus dos raíces reales y distintas, simultáneamente?

P9. Al dividir el polinomio $p(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $(x-1)$ el resto es 3 y el cuociente toma valor 21 para $x = 2$. Calcule α y β.

P10.

i) Sea $p(x) = x^2 + x + 1$. Demuestre que las raíces de $p(x)$ son las raíces cúbicas de la unidad, a excepción del 1.

ii) Sean a, b, c números naturales. Sea $q(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$.
Demuestre que el polinomio p divide al polinomio q.