

Auxiliar Examen: Polinomios
Profesor: Vicente Acuña
Auxiliar: Gonzalo Ovalle

P1. Solucione para x la ecuación $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Solución:

Primero, notamos que la siguiente ecuación es cierta:

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 \quad (*)$$

Puede corroborar que esto es cierto resolviendo el paréntesis.

Por otra parte, sabemos que la ecuación $x^5 = 1$ tiene como soluciones a las raíces quintas de la unidad, que denotaremos w_0, w_1, w_2, w_3, w_4 , donde $w_0 = 1$. Así, sabemos que si definimos el polinomio $p(x) = x^5 - 1$, las raíces de este polinomio, por definición, son los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $p(z) = 0$, lo que equivaldría a $z^5 - 1 = 0 \iff z^5 = 1$. Es decir, las raíces del polinomio $p(\cdot)$ son aquellas que solucionan $z^5 = 1$, que según lo recién dicho al principio de este párrafo son las raíces quintas de unidad, así las raíces quintas de la unidad son las raíces del polinomio $p(\cdot)$.

Sabiendo que $w_0 = 1, w_1, w_2, w_3, w_4$ son las raíces de $p(\cdot)$, por el teorema fundamental del álgebra, podemos factorizar $p(\cdot)$ como sigue:

$$p(x) = x^5 - 1 = (x - 1)(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$$

Esto junto a la ecuación (*), nos dice que:

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 = (x - 1)(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4) \quad (***)$$

Lo que nos dice:

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1)(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$$

Lo anterior es una igualdad de polinomios, y esto implica que las raíces de ambos polinomios son las mismas. Como la expresión del lado derecho tiene a $1, w_1, w_2, w_3, w_4$ como raíces, el lado izquierdo también debe tenerlas como raíces. Notamos que el lado izquierdo tiene un factor $(x - 1)$, es decir, 1 es raíz de la izquierda. Como el polinomio $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ debe tener a $1, w_1, w_2, w_3, w_4$ como raíces, y $(x - 1)$ al ser un polinomio de grado 1 tiene una sola raíz, que es el 1, las otras 4 raíces del polinomio $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ deben estar contenidas/expresadas en el polinomio $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, forzando a que las raíces de $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ sean w_1, w_2, w_3, w_4 , y nuevamente por teorema fundamental del álgebra, lo anterior nos dice:

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$$

□

Otro argumento capaz de concluir el ejercicio a partir de $(***)$ es el siguiente:

Por el teorema de la división, sabemos que si $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, al dividir $x^5 - 1$ por $(x - 1)$ existen únicos $Q(x), R(x) \in \mathbb{C}[x]$ tales que:

$$x^5 - 1 = (x - 1)Q(x) + R(x)$$

pero por la ecuación $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$, necesariamente se tiene que $Q(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ y $R(x) = 0$ (el polinomio nulo).

Y en verdad, podemos aplicar el mismo argumento ahora como sigue: sabemos que si $x^5 - 1 = (x - 1)(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$, al dividir $x^5 - 1$ por $(x - 1)$ existen únicos $Q(x), R(x) \in \mathbb{C}[x]$ tales que:

$$x^5 - 1 = (x - 1)Q(x) + R(x)$$

pero por la ecuación $(x - 1)(x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4) = x^5 - 1$, necesariamente se tiene que $Q(x) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$ y $R(x) = 0$ (el polinomio nulo).

Esto nos dice que $Q(x) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$ y por el teorema fundamental del álgebra, la ecuación:

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$$

Nos dice que si definimos el polinomio $F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, entonces:

$$F(x) = (x - w_1)(x - w_2)(x - w_3)(x - w_4)$$

Es decir, w_1, w_2, w_3, w_4 son raíces de $F(\cdot)$, es decir, son los únicos números complejos que solucionan la ecuación:

$$F(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

concluyendo lo pedido.

P2. Sea p un polinomio a coeficientes reales.

Se sabe que este polinomio tiene como raíces a $1 + i, 1 - i, 3, 6, 2i, 4 - i$. Encuentre el grado mínimo del polinomio p y encuentre la expresión de este polinomio sabiendo que es mónico.

Solución:

Como el polinomio p es a coeficientes reales, sabemos por un Corolario que si este polinomio tiene números complejos como raíces, entonces los conjugados de dichos complejos también tienen que ser raíces del polinomio. Así, sabiendo que $1 + i, 1 - i, 2i, 4 - i$ son raíces de p , sus conjugados también deben ser raíces. Como el conjugado de $1 + i$ es $1 - i$ y viceversa, no podemos agregar mas información para dichas raíces. Como $2i$ es raíz de p , su conjugado $-2i$ también lo es, y como $4 - i$ es raíz, su conjugado $4 + i$ también lo es.

Por otra parte, por el teorema fundamental del álgebra, sabemos que si el polinomio p tuviera n raíces complejas, podemos expresarlo como sigue:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \quad (*)$$

Donde r_1, \dots, r_n son las raíces del polinomio y a_n es el coeficiente que multiplica a x^n cuando el

polinomio es expresado como:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Como el polinomio p por enunciado es mónico, $a_n = 1$. Así, p necesariamente tiene como raíz a $1 + i, 1 - i, 3, 6, 2i, -2i, 4 - i, 4 + i$ y $a_n = 1$, por lo que junto a la ecuación (*) se tiene:

$$p(x) = (x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - 3)(x - 6)(x - 2i)(x - (-2i))(x - (4 - i))(x - (4 + i))D(x)$$

Donde $D(x)$ es un polinomio desconocido que contiene a todas las demás raíces que faltan y desconocemos de $p(\cdot)$, por lo tanto, respondiendo a la pregunta del enunciado, el polinomio $p(\cdot)$, bajo la información entregada, tiene grado mínimo 8.

P3. Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

- i) Demuestre que p es sobreyectivo si y solo si $gr(p) \geq 1$
Indicación: Recuerde el teorema fundamental del álgebra.
- ii) Demuestre que p es inyectivo si y solo si $gr(p) = 1$
Indicación: Ponerse en casos para $gr(p)$.

Solución:

- i) Al ser equivalencia, procedemos por doble implicancia:
 \longrightarrow] Sea p un polinomio sobreyectivo, queremos demostrar que tiene grado al menos 1. Para eso, procedemos por contradicción. Suponemos que tiene grado 0, es decir, es un polinomio constante, y esto equivale a suponer $p(x) = C$, con $C \in \mathbb{C}$ constante. Claramente la función $p(x) = C$ no es sobreyectiva pues no es posible de generar alguna imagen distinta a C , dado que es un polinomio constante, por lo que no tiene sentido esta suposición.

Con esto, necesariamente se tiene que $gr(p) \geq 1$.

\longleftarrow] Suponemos que el grado de p es mayor o igual a 1, queremos demostrar que necesariamente es sobreyectivo (visto como función que va de \mathbb{C} a \mathbb{C}). Notar que, según la definición de sobreyectividad, debemos demostrar la validez de la siguiente frase:

$$\forall y \in \mathbb{C}, \exists x \in \mathbb{C} : p(x) = y$$

Sea $y \in \mathbb{C}$ arbitrario. Queremos encontrar $x \in \mathbb{C}$ que cumpla $p(x) = y$.

Ya que el y fue dado arbitrariamente, es un número complejo, en particular es una constante, así que ahora definiremos el polinomio:

$$s(x) := p(x) - y$$

El polinomio $s(\cdot)$ tiene el mismo grado de $p(\cdot)$ puesto que restar una constante no altera el grado del polinomio. Con eso, como $gr(p) \geq 1$ por hipótesis, entonces $gr(s) \geq 1$.

Como $gr(s) \geq 1$, por teorema fundamental del álgebra, sabemos que $s(\cdot)$ tiene al menos una raíz en los complejos, llamémosle r_s , que cumple $s(r_s) = 0$ (por definición de raíz), es decir $s(r_s) = p(r_s) - y = 0$, lo que equivale a $p(r_s) = y$, solucionando la ecuación $p(x) = y$ como queríamos (el x buscado es $x = r_s$).

Como este procedimiento podemos hacerlo para cualquier $y \in \mathbb{C}$, siempre podremos encontrar solución para la ecuación $p(x) = y$, concluyendo que la frase de definición de sobreyectividad es verdadera, así que necesariamente $p(\cdot)$ es sobreyectivo.

ii) **Propuesto.**

- P4.** i) Factorice en \mathbb{R} y en \mathbb{C} el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$
 ii) Considere el polinomio $p(x) = x^7 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 - 1$. Se sabe que i es raíz de $p(x)$ de multiplicidad 2. Encuentre todas las raíces y factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$
- P5.** Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $gr(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$ y que los restos de sus divisores por $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x - 4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

Solución:

El polinomio al ser de grado 3 es de la forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y al ser mónico sabemos que $a = 1$, así $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$.

El teorema del resto nos dice que el resto de dividir un polinomio $p(\cdot)$ por $(x - w)$, es igual a la evaluación $p(w)$, así, los restos de dividir $p(\cdot)$ por $(x - 1)$, $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x - 4)$ son $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ y $p(4)$ respectivamente, que evaluando en la expresión del polinomio se tiene:

$$p(1) = 1 + b + c + d$$

$$p(2) = 8 + 4b + 2c + d$$

$$p(3) = 27 + 9b + 3c + d$$

$$p(4) = 64 + 16b + 4c + d$$

Por otra parte, el hecho de que $p(x)$ sea divisible por $(x - 1)$ quiere decir que:

$$p(x) = (x - 1)Q(x)$$

con $Q(x)$ algún polinomio que cumple $gr(Q) = gr(p) - 1$.

Note que las ecuaciones anteriores equivalen a decir que 1 es raíz de p , por lo tanto $p(1) = 0$, así que junto con la ecuación $p(1) = 1 + b + c + d$ se tiene que $b + c + d = -1$ (*).

Además, el enunciado nos dice que los restos de dividir $p(\cdot)$ por $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x - 4)$ son iguales, es decir $p(2) = p(3) = p(4)$. Esto implica en particular que $p(3) - p(2) = 0$ y

$p(4) - p(3) = 0$, es decir:

$$p(3) - p(2) = (27 + 9b + 3c + d) - (8 + 4b + 2c + d) = 19 + 5b + c = 0 \quad (1)$$

$$p(4) - p(3) = (64 + 16b + 4c + d) - (27 + 9b + 3c + d) = 37 + 7b + c = 0 \quad (2)$$

Restando la ecuación (2) con la (1) tenemos $18 + 2b = 0$, concluyendo $b = -9$.

Este valor reemplazarlo en (1) nos entrega $c = 26$.

Estos dos valores ingresados en (*) nos arroja $d = -18$.

Así el polinomio buscado es $p(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$.

P6. Sea $p(x)$ un polinomio tal que $p(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$.
Encuentre $p(x)$ y $p(x^2 - 1)$.

Solución:

Primero, notar que la ecuación $p(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$ nos dice que el grado del polinomio no puede ser muy alto, y lo demostraremos a continuación.

Supongamos que $gr(p) \geq 3$. Si la expresión de $p(\cdot)$ es la siguiente:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Así, al evaluar en $(x^2 + 1)$ tenemos:

$$p(x^2 + 1) = \sum_{k=0}^n a_k (x^2 + 1)^k = a_n (x^2 + 1)^n + a_{n-1} (x^2 + 1)^{n-1} + \dots + a_1 (x^2 + 1) + a_0$$

con $a_n \neq 0$. Con la ecuación recién planteada, podemos notar que si $n \geq 3$, es decir, $gr(p) \geq 3$, la expresión $a_n (x^2 + 1)^n$ del lado derecho, al desarrollarse, arrojaría un término de grado al menos 6 en su expansión, esto pues hay un x^2 en un binomio elevado a por lo menos al cubo, pues $n \geq 3$. Esto recién dicho contradice el hecho de que $p(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$, donde al lado derecho el término de mayor grado de 4, y no hay términos de grado al menos 6. Así, en verdad se tiene que $gr(p) \leq 2$.

Con la información recién obtenida, sabemos que el polinomio $p(\cdot)$ tiene la forma de un polinomio de grado a lo mas 2, es decir:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Para encontrar $p(x^2 - 1)$, primero encontraremos $p(x)$ (es decir, a, b y c) y luego evaluaremos en $(x^2 - 1)$.

Ahora, como $p(x) = ax^2 + bx + c$, podemos evaluar en $(x^2 + 1)$, resultando en:

$$\begin{aligned} p(x^2 + 1) &= a(x^2 + 1)^2 + b(x^2 + 1) + c \\ &= a(x^4 + 2x^2 + 1) + bx^2 + b + c \\ &= ax^4 + x^2(2a + b) + (a + b + c) \end{aligned}$$

Pero también por enunciado $p(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2$, teniendo la siguiente igualdad de polinomios:

$$ax^4 + x^2(2a + b) + (a + b + c) = x^4 + 4x^2$$

Como dos polinomios $c(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ y $d(x) = \sum_{k=0}^n d_k x^k$ son iguales si y solo si $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, d_i = c_i$, podemos igualar coeficientes de términos respectivos, obteniendo:

$$a = 1 \quad (2a + b) = 4 \quad (a + b + c) = 0$$

Lo que se resume en $a = 1, b = 2, c = -3$, concluyendo así $p(x) = x^2 + 2x - 3$, que evaluado en $(x^2 - 1)$ nos permite concluir:

$$p(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) - 3 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 2 - 3 = x^4 - 4$$

obteniendo lo pedido.

P7. Mediante división de polinomios, factorize los siguientes polinomios:

- i) $2x^3 - 5x^2 - x - 6$
- ii) $4x^4 - 15x^3 + 12x^2 + 4x$
- iii) $2x^4 - 4x^3 - 42x^2 - 124x - 80$
- iv) $-x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 9x + 18$

P8. Si $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, muestre que:

- i) $1 + 2w + 3w^2 + \dots + nw^{n-1} = \frac{-n}{1-w}$
- ii) $(1 - w)(1 - w^2) \dots (1 - w^{n-1}) = n$

P9. Sean a, b, c números reales positivos.

¿Es posible que los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = bx^2 + cx + a$, $r(x) = cx^2 + ax + b$ tengan sus dos raíces reales y distintas, simultáneamente?

Solución:

Supongamos que los 3 polinomios expuestos tienen sus dos raíces distintas y reales. Al ser polinomios cuadráticos, podemos determinar sus raíces con la fórmula cuadrática clásica, que nos indica que para $p(\cdot), q(\cdot), r(\cdot)$ respectivamente:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad q_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ba}}{2b} \quad r_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2c}$$

Para que todas las posibles raíces anteriores sean reales, requiere que las raíces estén bien definidas, es decir, sean raíces de números positivos, por lo que necesitamos

$(b^2 - 4ac) \geq 0, (c^2 - 4ba) \geq 0, (a^2 - 4bc) \geq 0$, y si además exigimos que sean distintas, el signo \pm nos debe arrojar en los 3 casos las 2 soluciones distintas, para eso necesitamos que la raíz no sea 0, así que en verdad necesitamos imponer $(b^2 - 4ac) > 0, (c^2 - 4ba) > 0, (a^2 - 4bc) > 0$, que equivalen a $b^2 > 4ac, c^2 > 4ab, a^2 > 4bc$.

Estas tres inecuaciones deben cumplirse simultáneamente, pero multiplicando las 3 inecuaciones, como $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, resulta:

$$a^2b^2c^2 > 64a^2b^2c^2$$

y simplificando a ambos lados por $a^2b^2c^2$ equivale a decir $1 > 64$, lo que no tiene sentido, llegando a una contradicción.

Es decir, no puede ser que los 3 polinomios expuestos de enunciado tengan sus dos raíces reales y distintas, simultáneamente.

P10. Al dividir el polinomio $p(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $(x - 1)$ el resto es 3 y el cuociente toma valor 21 para $x = 2$. Calcule α y β .

Solución:

Primero, notamos que el teorema del resto nos dice que el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es $p(1)$, que podemos calcularlo a partir de la expresión del polinomio del enunciado:

$$p(1) = \alpha \cdot 1^4 - 1^3 + \beta \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 - 2\alpha = \beta - \alpha + 9$$

donde además el enunciado nos dice que el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ es 3, es decir, $p(1) = 3$, concluyendo :

$$\beta - \alpha + 9 = 3 \iff \alpha - \beta = 6 \quad (*)$$

Por otra parte, por teorema de la división, sabemos que al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que:

$$p(x) = q(x)(x - 1) + r(x)$$

pero en verdad $r(x)$ por definición es el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 1)$ que por enunciado es 3, así que en verdad tenemos:

$$p(x) = q(x)(x - 1) + 3 \quad (**)$$

donde $q(x)$ se llama el polinomio cuociente de la división por $(x - 1)$.

La frase de enunciado **al dividir $p(x)$ por $(x - 1)$, el cuociente toma valor 21 para $x=2$** quiere decir que dicho polinomio $q(x)$ resultante de aplicar el teorema de la división para $(x - 1)$ como divisor, evaluado en 2, es 21, es decir $q(2) = 21$.

Ahora, nos fijamos nuevamente en la ecuación de (**), que nos da una forma de calcular $p(x)$ a partir de $q(x)$. Evaluando $p(x)$ en 2, usando (**) obtenemos:

$$p(2) = q(2) \cdot (2 - 1) + 3 = 21 + 3 = 24$$

Pero a su vez, evaluando $p(x)$ en 2 según su expresión de enunciado:

$$p(2) = \alpha 2^4 - 2^3 + \beta 2^2 + 10 \cdot 2 - 2\alpha = 16\alpha - 8 + 4\beta + 20 - 2\alpha = 14\alpha + 4\beta + 12$$

Igualando ambas expresiones obtenidas para $p(2)$ tenemos:

$$24 = 14\alpha + 4\beta + 12 \iff 14\alpha + 4\beta = 12 \quad (***)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones arrojado por (*) y (***) se concluye $\alpha = 2$ y $\beta = -4$.

- P11.** i) Sea $p(x) = x^2 + x + 1$. Demuestre que las raíces de $p(x)$ son las raíces cúbicas de la unidad, a excepción del 1.
- ii) Sean a, b, c números naturales. Sea $q(x) = x^{3a} + x^{3b+1} + x^{3c+2}$. Demuestre que el polinomio p divide al polinomio q .

Solución:

- i) Las raíces de $p(\cdot)$, al ser un polinomio cuadrático, se encuentran con la fórmula cuadrática como sigue:

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Queda propuesto corroborar que $r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ y $r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ son en efecto las raíces cúbicas de la unidad distintas del 1, que serían $w_1 = e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$ y $w_2 = e^{i \cdot \frac{4\pi}{3}}$, respectivamente. (creo necesario e importante saber pasar números conocidos de forma cartesiana a polar y viceversa, como lo es el caso de las raíces cúbicas, son ángulos conocidos).

- ii) **Propuesto.**