

**MA1101-1:** Introducción al Álgebra**Profesor:** Vicente Acuña**Auxiliares:** Nicolás Toro

## Auxiliar 16: Polinomios

**P1. Division de polinomios:** Sean los polinomios  $q(x) = x^2 + x + 1$  y  $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$ , donde  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ . Demuestre que  $p(x)$  es divisible por  $q(x)$  cualquiera sean los valores de  $n_1, n_2, n_3$ .

**P2. Encontrar polinomio:** Sea  $p \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio monico con  $\text{gr}(p) = 3$ . Se sabe que  $p(x)$  es divisible por  $(x - 1)$  y que los restos de sus divisores por  $(x - 2)$ ,  $(x - 3)$  y  $(x - 4)$  son iguales. Determine  $p(x)$ , justificando sus pasos y encuentre todas sus raíces.

**P3. Raíces:** Sea  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  el polinomio dado por:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$$

Encuentre todas las raíces de  $p(x)$  sabiendo que admite una raíz racional, no entera, positiva y otra raíz entera negativa. Factorice  $p(x)$  en  $\mathbb{R}[x]$  y en  $\mathbb{C}[x]$

**P4. Relaciones de Cardano-Vieta:** Sea  $p(x) = z^3 + az^2 + bz + c$  un polinomio con raíces  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

(Estas son las relaciones de Cardano-Vieta para un polinomio monico de grado 3). Úselo para encontrar las raíces de  $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$  sabiendo que una de sus raíces no es real y tiene modulo 4.

### Resumen

- **[Polinomio]:** Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  cuerpo, llamamos polinomio en  $\mathbb{K}$  (denotado  $p \in \mathbb{K}[x]$ ) a una función:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \end{aligned}$$

donde  $n \in \mathbb{N}$  y  $p_k \in \mathbb{K}$  constantes.

- **[Igualdad de polinomios]:** Si  $p \in \mathbb{K}[x]$  y  $q \in \mathbb{K}[x]$  con  $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  y  $q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$  entonces:

$$p = q \Leftrightarrow (n = m \wedge \forall k \in \{0, \dots, 1\}, p_k = q_k)$$

- **[Grado]:** Si  $p \in \mathbb{K}[x]$  con  $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  llamamos  $gr(p) = n$  con  $n$  el mayor número tal que  $p_n \neq 0$ . Si  $p(x) = 0$  definimos  $gr(P) = -\infty$ .  
**Obs.:** Si  $p_n = 1$ ,  $p$  se dirá polinomio mónico.

- **[Anillo de polinomios]:** Si  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  es cuerpo, entonces  $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$  es anillo conmutativo que no posee divisores de 0.

- **[Suma y producto de polinomios]:** Si  $p, q \in \mathbb{K}[x]$  con  $gr(p) = n$  y  $gr(q) = m$  entonces  $gr(p + q) \leq \max\{n, m\}$  con:

$$(p + q)(x) = \sum_{k=0}^{\max\{n, m\}} (p_k + q_k) x^k$$

Además  $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$ .

- **[Inversos]:** En  $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$  los únicos polinomios con inversos son los de grado 0.

- **[Teorema de la División]:** Sean  $p, d \in \mathbb{K}[x]$  con  $d \neq 0$ . Entonces existe un único par  $q, r \in \mathbb{K}[x]$  tal que

1.  $p = q \cdot d + r$
2.  $gr(r) < gr(d)$

**Obs.:** A  $q$  se le llama cociente, a  $r$  resto, y  $d$  divisor de  $p$  con resto  $r$ .

- **[Teorema del resto]:** Sea  $p \in \mathbb{K}[x]$  y  $c \in \mathbb{K}[x]$  y  $c \in \mathbb{K}$ . El resto de dividir  $P$  por el polinomio  $(x - c)$  es exactamente  $p(c)$

- **[Raíz]:**  $c \in \mathbb{K}$  es raíz de  $p \in \mathbb{K}[x]$  si  $p(c) = 0$ .

- **[Prop raíces]:**  $c \in \mathbb{K}$  es raíz de  $p \in \mathbb{K}[x] \Leftrightarrow (x - c) | p(x)$  (el resto es 0).

Definimos  $\mathcal{Z}(p)$  como el conjunto de raíces de  $p$ .

- **[Prop varias]:**

1. Si  $c_1, c_2, \dots, c_k$  raíces distintas de  $p$  entonces  $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) | p(x)$ .
2. Si  $p \in \mathbb{K}[x]$  con  $gr(p) = n \geq 1$  entonces  $p$  posee a lo más  $n$  raíces distintas.
3. Sean  $n \geq 0$  y  $p, q \in \mathbb{K}[x]$  con  $gr(p) \leq n$  y  $gr(q) \leq n$ . Si  $p$  y  $q$  coinciden en  $n + 1$  puntos, entonces son iguales.

- **[TFA (D'Alembert)]:** Si  $p \in \mathbb{C}[x]$  es tal que  $gr(p) = n \geq 1$  entonces  $p$  posee al menos una raíz en  $\mathbb{C}$ .

Se deduce mediante esto que el polinomio  $p$  debe poseer  $n$  raíces en  $\mathbb{C}$ .

- **[Factorización compleja]:** Si  $p \in \mathbb{C}[x]$  es tal que  $gr(p) = n \geq 1$  entonces existen  $\alpha, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$  y naturales  $l_1, \dots, l_m \geq 1$  tales que  $gr(p) = l_1 + \dots + l_m$  y:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \dots (x - c_m)^{l_m}$$

- **[Raíz conjugada]:** Si  $p \in \mathbb{C}[x]$  tiene todos sus coeficientes reales, y  $z \in \mathbb{C}$  es raíz de  $P$  entonces  $\bar{z}$  es también raíz de  $p$ .

- **[Factorización real]:** Si  $p \in \mathbb{R}[x]$  es tal que  $gr(p) = n \geq 1$ , entonces existen  $\alpha, c_1, \dots, c_m, p_1, q_2, \dots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$  tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1) \dots (x - c_m)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s)$$

Donde  $c_k$  son las raíces del polinomio y  $(x^2 + p_1x + q_1), \dots, (x^2 + p_sx + q_s)$  no tienen raíces reales, y  $\alpha = p_n$  en  $p$ .

- **[Coeficientes enteros]:** Sea  $p \in \mathbb{R}[x]$ . si  $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$  ( $r$  y  $s$  primos relativos) es una raíz de  $p$  entonces  $r | p_0$  y  $s | p_n$ .

- **[Ultima propiedad]:** Si  $p \in \mathbb{R}[x]$  es mónico, con coeficientes  $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}$  entonces toda raíz racional de  $p$  es entera y divide a  $p_0$ .

**P1. Division de polinomios:** Sean los polinomios  $q(x) = x^2 + x + 1$  y  $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$ , donde  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ . Demuestre que  $p(x)$  es divisible por  $q(x)$  cualquiera sean los valores de  $n_1, n_2, n_3$ .

En efecto, basta ver que las raíces de  $q(x)$  son raíces de  $p(x)$

obs: Hay varios métodos

1) Calcular las raíces de  $q$  y evaluar en  $p$

2) Si  $q(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$  (1)

Pon T.F.A. tiene dos soluciones

Notamos que  $x^3 + x^2 + x = 0$  / (1) se multiplica por  $x$

Así, restando (1), se tiene:

$$x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 1$$

∴ Las dos raíces de  $q$  son raíces cúbicas de la unidad.

Podríamos encontrar cuáles son evaluando en  $q(x)$ , pero esto no es necesario, pues si  $\bar{x}$  es raíz de  $q \Rightarrow \bar{x}^3 = 1$ .

Luego, evaluando en  $p$ :

$$\begin{aligned} p(\bar{x}) &= \bar{x}^{3n_1} + \bar{x}^{3n_2+1} + \bar{x}^{3n_3+2} \\ &= (\bar{x}^3)^{n_1} + (\bar{x}^3)^{n_2} \cdot \bar{x} + (\bar{x}^3)^{n_3} \cdot \bar{x}^2 \\ &= 1 + \bar{x} + \bar{x}^2 \quad / \bar{x}^3 = 1 \\ &= q(\bar{x}) \quad / \text{Definición de } q \\ &= 0 \quad / \bar{x} \text{ raíz de } q. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Las raíces de  $q$  dividen a las de  $p$ .

Así, si  $r_1, r_2$  son las raíces de  $q$  (i.e.  $q(x) = (x-r_1)(x-r_2)$ )

Entonces

$$\underbrace{(x-r_1)(x-r_2)}_{= q(x)} \mid p(x)$$

**P2. Encontrar polinomio:** Sea  $p \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio monico con  $\text{gr}(p) = 3$ . Se sabe que  $p(x)$  es divisible por  $(x-1)$  y que los restos de sus divisores por  $(x-2)$ ,  $(x-3)$  y  $(x-4)$  son iguales. Determine  $p(x)$ , justificando sus pasos y encuentre todas sus raíces.

- Como  $p$  es mónico y tiene grado 3, tiene la sig. estructura:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , pues  $p \in \mathbb{R}[x]$ .

- Como 1 es raíz de  $p$ , lo podemos escribir como:

$$p(x) = (x-1) \cdot (x^2 + \alpha x + \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

no hay coeficiente  
por ser mónico.

- Sólo falta encontrar  $\alpha, \beta$  y para esto, usemos la hipótesis que falta

$$p(x) = (x-2) \cdot q_1(x) + r(x)$$

$$p(x) = (x-3) \cdot q_2(x) + r(x)$$

$$p(x) = (x-4) \cdot q_3(x) + r(x)$$

Tienen el mismo resto  $r(x)$  por hipótesis.  
Además  $\text{gr}(x-2) > \text{gr}(r)$   
 $\Leftrightarrow 1 > \text{gr}(r)$   
 $\Rightarrow r(x) = r \in \mathbb{Q}$  constante

Luego:  $p(2) = p(3) = p(4) = r$ . Esto es:

$$\begin{cases} 1 \cdot (2^2 + 2\alpha + \beta) = r \\ 2 \cdot (3^2 + 3\alpha + \beta) = r \\ 3 \cdot (4^2 + 4\alpha + \beta) = r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2\alpha + \beta = r & (1) \\ 18 + 6\alpha + 2\beta = r & (2) \\ 48 + 12\alpha + 3\beta = r & (3) \end{cases}$$

$$\text{Haciendo } (2) = (1): 18 + 6\alpha + 2\beta = 4 + 2\alpha + \beta$$

$$\Leftrightarrow 14 + 4\alpha + \beta = 0 \quad (4)$$

$$\text{Haciendo } (3) = (2): 48 + 12\alpha + 3\beta = 18 + 6\alpha + 2\beta$$

$$\Leftrightarrow 30 + 6\alpha + \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 + 2\alpha + (14 + 4\alpha + \beta) = 0 \quad / (4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 + 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -8}$$

$$\begin{aligned} \text{Reemplazando en (4), se tiene que } \beta &= -4\alpha - 14 \\ &= 32 - 14 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 18)$$

**P2. Encontrar polinomio:** Sea  $p \in \mathbb{R}[x]$  un polinomio monico con  $gr(p) = 3$ . Se sabe que  $p(x)$  es divisible por  $(x - 1)$  y que los restos de sus divisores por  $(x - 2)$ ,  $(x - 3)$  y  $(x - 4)$  son iguales. Determine  $p(x)$ , justificando sus pasos y encuentre todas sus raíces.

Encontramos sus raíces:

$$p(x) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 8x + 18) = 0$$

Quitando la raíz  $x_1 = 1$  de las opciones:

$$x^2 - 8x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 18}}{2}$$

$$8 \cdot 4 = 32 \\ + 40$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 72}}{2}$$

$$= 4 \pm \frac{2\sqrt{-2}}{2}$$

$$= 4 \pm \sqrt{-2}$$

$$= 4 \pm i\sqrt{2}$$

Finalmente las raíces son:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 + i\sqrt{2} \\ x_3 = 4 - i\sqrt{2} \end{cases}$$

P3. Raíces: Sea  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  el polinomio dado por:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$$

Encuentre todas las raíces de  $p(x)$  sabiendo que admite una raíz racional, no entera, positiva y otra raíz entera negativa. Factorice  $p(x)$  en  $\mathbb{R}[x]$  y en  $\mathbb{C}[x]$

Haremos división sintética. Notemos que por la estructura de  $p$  las soluciones deben ser de la forma  $\frac{p}{q}$  con  $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$  y  $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Vamos probando los valores:

$$p(1) = 2 \cdot 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 + 19 \cdot 1 - 10 = 12$$

$$p(-1) = 2 \cdot (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 19 \cdot (-1) - 10 = -24$$

no son raíces

Probemos con  $x = 1/2$ . Usamos división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10 & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 2 & -1 & 2 & 19 & -10 & \\
 & \downarrow & & & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 10 & \\
 \hline
 2 & 0 & 2 & 20 & 0 & 
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \frac{1}{2}$$

Luego,  $1/2$  es raíz de  $p$  y los coeficientes restantes son los coeficientes del divisor de  $p$ .

$$\Rightarrow p(x) = (x - \frac{1}{2})(2x^3 + 0x^2 + 2x + 20)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x - \frac{1}{2}) \underbrace{(2x^3 + 2x + 20)}_{w(x)}$$

Ahora encontramos la raíz racional positiva no entera. Falta la negativa. Como sabemos que es entera, entonces tenemos las siguientes posibilidades:  $\pm 2, \pm 5, \pm 10$

$$w(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2) + 20 = -16 - 4 + 20 = 0$$

$$\Rightarrow p(x) = (x - \frac{1}{2})(x + 2) \cdot (2x^2 + bx + c) \quad \text{con } (x+2)(2x^2 + bx + c) = 2x^3 + 2x + 20$$

**P3. Raíces:** Sea  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  el polinomio dado por:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$$

Encuentre todas las raíces de  $p(x)$  sabiendo que admite una raíz racional, no entera, positiva y otra raíz entera negativa. Factorice  $p(x)$  en  $\mathbb{R}[x]$  y en  $\mathbb{C}[x]$

Podemos encontrar  $a, b, c \in \mathbb{R}$  igualando:

$$\begin{aligned} & (x+2)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^3 + (2a+b)x^2 + (c+2b)x + 2c \\ &\stackrel{!}{=} 2x^3 + 2x + 20 \quad / \text{ Imponemos la igualdad} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ 2a+b=0 \\ c+2b=2 \\ 2c=20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=10 \\ b=-4 \end{cases}$$

Finalmente:

$$p(x) = (x - \frac{1}{2})(x+2)(2x^2 - 4x + 10)$$

Aquí están las raíces que faltan.

Igualeando  $2x^2 - 4x + 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$= 1 \pm 2i$$

$$\Rightarrow \text{raíces son } x_1 = 1/2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 1 + 2i, \quad x_4 = 1 - 2i$$

$p$  se factoriza en  $\mathbb{C}[x]$  como

$$p(x) = 2(x - 1/2)(x+2)(x - (1+2i))(x - (1-2i))$$

y en  $\mathbb{R}[x]$  como:

$$p(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x+2)(x^2 - 2x + 5)$$

**P4. Relaciones de Cardano-Vieta:** Sea  $p(x) = z^3 + az^2 + bz + c$  un polinomio con raíces  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

(Estas son las relaciones de Cardano-Vieta para un polinomio monico de grado 3). Úselo para encontrar las raíces de  $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$  sabiendo que una de sus raíces no es real y tiene modulo 4.

- Como  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  son raíces, entonces:

$$\begin{aligned} p(x) &= (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma) \\ &= (z^2 - (\alpha + \beta)z + \alpha\beta)(z - \gamma) \\ &= z^3 - z^2\gamma - (\alpha + \beta)z^2 + \gamma(\alpha + \beta)z + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma \\ &= z^3 + z^2(-\gamma - \alpha - \beta) + z(\alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta) + (-\alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

Como  $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$

$$\Rightarrow a = -\gamma - \alpha - \beta$$

$$b = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta$$

$$c = -\alpha\beta\gamma.$$

y se tiene lo pedido.

- Por la parte anterior se tiene que:

$$(1) \quad 11 = \alpha + \beta + \gamma$$

$$(2) \quad 44 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$$

$$(3) \quad 112 = \alpha\beta\gamma$$

Como sabemos que una raíz no es real (s.p.g. tomemos  $\alpha$ ), su conjugado también debe ser raíz ( $\bar{\alpha} = \beta$ ).

Por T.F.A. hay 3 raíces  $\Rightarrow \gamma$  debe ser real.

De (3), se tiene:  $112 = \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \gamma$

$$= |\alpha|^2 \cdot \gamma$$

$$= 4^2 \cdot \gamma$$

$$= 16\gamma \Rightarrow \boxed{\gamma = 7}$$

$$\text{De (1): } 11 = \alpha + \beta + \gamma \Leftrightarrow 4 = \alpha + \bar{\alpha} \Leftrightarrow 4 = 2 \cdot \text{Re}(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2 = \text{Re}(\alpha)$$



**P4. Relaciones de Cardano-Vieta:** Sea  $p(x) = z^3 + az^2 + bz + c$  un polinomio con raíces  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ . Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

(Estas son las relaciones de Cardano-Vieta para un polinomio monico de grado 3). Úselo para encontrar las raíces de  $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$  sabiendo que una de sus raíces no es real y tiene modulo 4.

Como  $|z|=4$ , entonces

$$\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4 + \operatorname{Im}(z)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)^2 = 12$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

Finalmente, las raíces son:

$$\alpha = 2 + i \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\beta = 2 - i \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\gamma = 7$$