

MA1101-1: Introducción al Álgebra**Profesor:** Vicente Acuña**Auxiliares:** Nicolás Toro

Auxiliar 16: Polinomios

P1. Division de polinomios: Sean los polinomios $q(x) = x^2 + x + 1$ y $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$, donde $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$. Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x)$ cualquiera sean los valores de n_1, n_2, n_3 .

P2. Encontrar polinomio: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio monico con $\deg(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x - 1)$ y que los restos de sus divisores por $(x - 2)$, $(x - 3)$ y $(x - 4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos y encuentre todas sus raíces.

P3. Raíces: Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ el polinomio dado por:

$$p(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10$$

Encuentre todas las raíces de $p(x)$ sabiendo que admite una raíz racional, no entera, positiva y otra raíz entera negativa. Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{C}[x]$

P4. Relaciones de Cardano-Vieta: Sea $p(x) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

(Estas son las relaciones de Cardano-Vieta para un polinomio monico de grado 3). Úselo para encontrar las raíces de $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que una de sus raíces no es real y tiene modulo 4.

Resumen

- **[Polinomio]**: Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ cuerpo, llamamos polinomio en \mathbb{K} (denotado $p \in \mathbb{K}[x]$) a una función:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longrightarrow p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k \end{aligned}$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $p_k \in \mathbb{K}$ constantes.

- **[Igualdad de polinomios]**: Si $p \in \mathbb{K}[x]$ y $q \in \mathbb{K}[x]$ con $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ y $q(x) = \sum_{k=0}^m q_k x^k$ entonces:

$$p = q \Leftrightarrow (n = m \wedge \forall k \in \{0, \dots, 1\}, p_k = q_k)$$

- **[Grado]**: Si $p \in \mathbb{K}[x]$ con $p(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$ llamamos $gr(p) = n$ con n el mayor número tal que $p_n \neq 0$. Si $p(x) = 0$ definimos $gr(P) = -\infty$.
Obs.: Si $p_n = 1$, p se dirá polinomio mónico.

- **[Anillo de polinomios]**: Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es cuerpo, entonces $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es anillo conmutativo que no posee divisores de 0.

- **[Suma y producto de polinomios]**: Si $p, q \in \mathbb{K}[x]$ con $gr(p) = n$ y $gr(q) = m$ entonces $gr(p + q) \leq \max\{n, m\}$ con:

$$(p + q)(x) = \sum_{k=0}^{\max\{n, m\}} (p_k + q_k) x^k$$

Además $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$.

- **[Inversos]**: En $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ los únicos polinomios con inversos son los de grado 0.

- **[Teorema de la División]**: Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con $d \neq 0$. Entonces existe un único par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que

1. $p = q \cdot d + r$
2. $gr(r) < gr(d)$

Obs.: A q se le llama cociente, a r resto, y d divisor de p con resto r .

- **[Teorema del resto]**: Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir P por el polinomio $(x - c)$ es exactamente $p(c)$

- **[Raíz]**: $c \in \mathbb{K}$ es raíz de $p \in \mathbb{K}[x]$ si $p(c) = 0$.

- **[Prop raíces]**: $c \in \mathbb{K}$ es raíz de $p \in \mathbb{K}[x] \Leftrightarrow (x - c) | p(x)$ (el resto es 0).

Definimos $\mathcal{Z}(p)$ como el conjunto de raíces de p .

- **[Prop varias]**:

1. Si c_1, c_2, \dots, c_k raíces distintas de p entonces $(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_k) | p(x)$.
2. Si $p \in \mathbb{K}[x]$ con $gr(p) = n \geq 1$ entonces p posee a lo más n raíces distintas.
3. Sean $n \geq 0$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$ con $gr(p) \leq n$ y $gr(q) \leq n$. Si p y q coinciden en $n + 1$ puntos, entonces son iguales.

- **[TFA (D'Alembert)]**: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$ entonces p posee al menos una raíz en \mathbb{C} .

Se deduce mediante esto que el polinomio p debe poseer n raíces en \mathbb{C} .

- **[Factorización compleja]**: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$ entonces existen $\alpha, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, \dots, l_m \geq 1$ tales que $gr(p) = l_1 + \dots + l_m$ y:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \dots (x - c_m)^{l_m}$$

- **[Raíz conjugada]**: Si $p \in \mathbb{C}[x]$ tiene todos sus coeficientes reales, y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P entonces \bar{z} es también raíz de p .

- **[Factorización real]**: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $gr(p) = n \geq 1$, entonces existen $\alpha, c_1, \dots, c_m, p_1, q_2, \dots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$ tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1) \dots (x - c_m)(x^2 + p_1x + q_1) \dots (x^2 + p_sx + q_s)$$

Donde c_k son las raíces del polinomio y $(x^2 + p_1x + q_1), \dots, (x^2 + p_sx + q_s)$ no tienen raíces reales, y $\alpha = p_n$ en p .

- **[Coeficientes enteros]**: Sea $p \in \mathbb{R}[x]$. si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (r y s primos relativos) es una raíz de p entonces $r | p_0$ y $s | p_n$.

- **[Ultima propiedad]**: Si $p \in \mathbb{R}[x]$ es mónico, con coeficientes $p_0, \dots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}$ entonces toda raíz racional de p es entera y divide a p_0 .