Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1101-10 Introducción al Álgebra
8 de julio de 2024

Auxiliar Extra Control 6

Profesor: Alexis Fuentes P.
Auxiliar: Luis Fuentes C. y Gary Vidal C.

P1. Demuestre que:

a) $(H, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, donde $H = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ y $\cdot$ es la multiplicación usual de $\mathbb{R}$.

b) $(S, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$, donde $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\cdot$ es la multiplicación usual de $\mathbb{C}$.

c) $(F_n, *)$ es subgrupo de $(G, *)$, donde $(G, *)$ es un grupo abeliano y $F_n = \{g \in G : g^n = e\}$, con e el neutro de G.

P2. a) Sea $(G, *)$ grupo abeliano y H, K subgrupos. Pruebe que $(H \cap K, *)$ también es subgrupo.

b) Sea $G = \{w \in \mathbb{C} | \exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, w^n = 1\}$

1) Demuestre que $(G, \cdot)$ es subgrupo de $(C\backslash\{0\}, \cdot)$.

2) Explique por qué la suma en $\mathbb{C}$ no es cerrada en G, es decir, por qué la suma no es una ley de composición interna en G.

3) Sea $F : (G, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$ un homomorfismo de grupos. Demuestre que $F(w) = 0, \forall w \in G$

P3. Sea $(K, +, \cdot)$ cuerpo y $(A, \oplus, \otimes)$ un anillo con $1_A \neq 0_A$. Sea $f : K \to A$ un morfismo de anillos entre K y A. Demuestre que:

a) 1) $f(0_K) = 0_A$

2) $\forall k \in K, f(-x) = -f(x)$

3) $(f(K), \oplus)$ es un subgrupo de $(A, \oplus)$.

b) $f(x) = 0_A \iff x = 0_K$

c) f es inyectiva o $f = 0_A$

P4. Considere $A = \{a, b, c, d\}$ y sean $+$ y $\cdot$ dos leyes de composición interna en A dadas por las siguientes tablas incompletas:

$+$	a	b	c	d
a	a			
b		c		
c		d		
d				c

$\cdot$	a	b	c	d
a				
b		b		
c			a	c
d				

Complete las tablas suponiendo que $(A, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, y determine 0_A y 1_A.

P5. a) Sean $z, \omega \in \mathbb{C}$ tales que $|z + w| = |z - w|$, con $w \neq 0$. Pruebe que

1) $Re(z\overline{w}) = 0$.

2) $Re\left(\frac{z}{\omega}\right) = 0$.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$. Considere

$$w = \frac{2z - i}{2 + iz}$$

y pruebe que $|w| = 1$.

P6. a) Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$. Pruebe que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se tiene :

$$f(z_1, z_2) \cdot f(\overline{z_1}, \overline{z_2}) \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

b) Sean $0, z, w \in \mathbb{C}$ tres complejos que forman un triángulo rectángulo (rectángulo en 0). Demuestre que $\overline{z}w + z\overline{w} = 0$. Usando esto, verifique que $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2$

c) Considere la secuencia $z_n = x_n + iy_n = (1 + i\sqrt{3})^{3n}$

1) Encuentre la forma polar de z_n

2) Muestre que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} + 8x_n = 0$

P7. Sea $n \geq 1$ un natural. Determine todas las soluciones $z \in \mathbb{C}$ de la ecuación

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 + z^n}{2}$$

P8. a) Encuentre las raíces de $z^3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

b) Para $z \in \mathbb{C}$ se cumple $|z| = |z + 1| = 1$. Pruebe que z es una raíz cúbica de la unidad.